第 六 章　结构位移计算

本章处在静定结构分析与超静定结构分析的交界处，起着承上启下的作用。

在材料力学中，曾学过求梁的位移计算方法(如直接积分法等)。但这些方法对于结构力学的研究对象，如多跨静定梁、桁架、刚架等结构，是不适合的。

在结构力学分析中，通常采用由虚功原理提供的结构位移计算公式来讨论静定结构在荷载和温度等因素作用下的位移计算。这种方法尤其是用来计算结构任意点处的位移更具有简便的优点。

本章目录

- 结构位移计算的一般公式
- 荷载作用下的位移计算
- 图乘法

§6-2 结构位移计算的一般公式

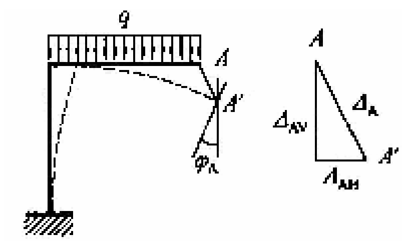
一. 结构的位移

结构在外界因素作用下，会发生变形。因此而使结构各点的位置发生相应的改变，这种改变称为结构的位移。

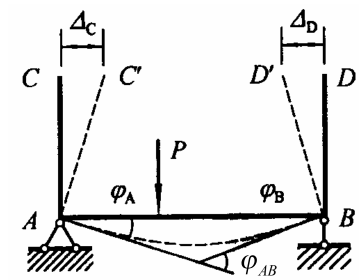
- 线位移 — 结构上某点沿直线方向移动的距离。
- 角位移 — 结构上某截面旋转的角度。

产生位移的原因主要有：

- 荷载作用；
- 温度变化和材料胀缩；
- 支座沉降和制造误差。



绝对位移



相对位移

截面A角位移 φ_A

A点线位移 Δ_A 包含：

水平线位移 Δ_{AH}

竖向线位移 Δ_{AV}

CD两点的水平相对线位移：

$$(\Delta_{CD})_H = \Delta_C + \Delta_D$$

AB两截面的相对转角：

$$\varphi_{AB} = \varphi_A + \varphi_B$$

以上线位移、角位移及相对位移统称为广义位移

二. 结构位移计算的一般公式

根据刚体体系虚功原理和叠加原理可得出结构位移计算的一般公式为：

$$\Delta = \sum\int(\overline{M}\kappa + \overline{F}_N\varepsilon + \overline{F}_Q\gamma_0)ds - \sum\overline{F}_{RK}c_K$$

这是一个普遍性公式，其普遍性表现在：

- 从变形类型来看，它既可以考虑弯曲变形，也可以考虑拉伸或剪切变形。
- 从变形因素来看，它既可以考虑荷载引起的位移，也可以考虑温度或支座移动引起的位移。
- 从结构类型来看，它可用于静定结构，也可用于超静定结构。
- 从材料性质来看，它可用于弹性材料，也可用于非弹性材料。

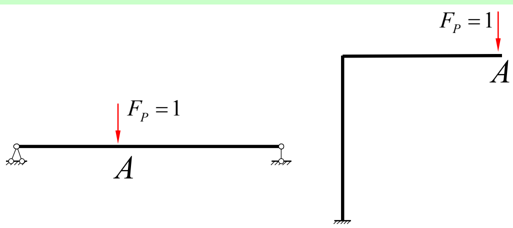
三. 广义位移的计算

这种利用根据虚功原理导出的结构位移计算的一般公式，沿所求位移方向虚设单位荷载求结构位移的方法，称为单位荷载法。

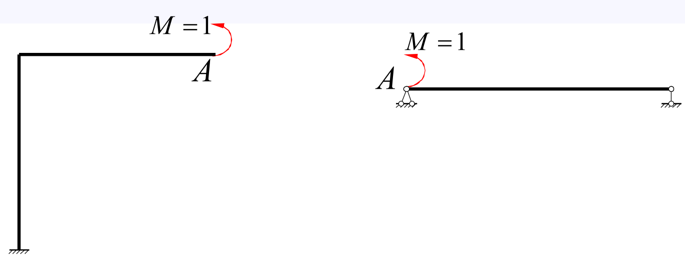
在虚设单位力时其指向可以任意假设，如计算结果为正值，即表示位移方向与所虚设的单位力指向相同，否则相反。

在计算各种位移时，可按以下方法假设虚拟状态下的单位力。求线位移时施加单位集中力，求角位移时施加单位集中力偶。

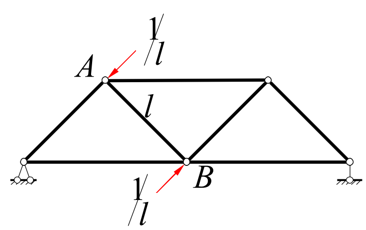
❑求如图所示结构上A点的竖向线位移Δ_{AV}，可在该点沿所求位移方向加一单位力。



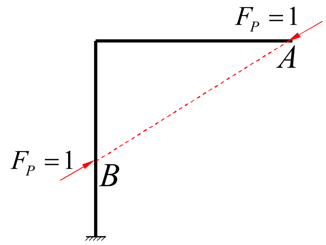
❑求如图所示结构上截面A的角位移φ_A，可在该处加一单位力偶。

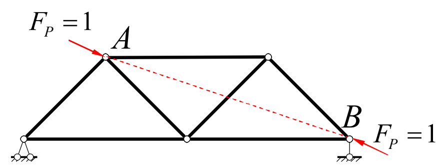


❑求如图所示桁架中AB杆的角位移φ_{AB}，则应加一单位力偶，构成这一力偶的两个集中力，各作用于该杆的两端并与杆轴垂直，其值为$1/l$，l为该杆长度。

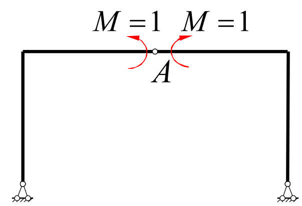


❑求如图所示结构上A、B两点沿其连线方向的相对线位移Δ_{AB}，可在该两点沿其连线加上两个方向相反的单位力。





❑求梁或刚架上两个截面的相对角位移，可在这两个截面上加两个方向相反的单位力偶。如图所示为求铰A处左、右两侧截面的相对角位移。



§6-3 静定结构在荷载作用下的位移计算

一. 位移计算公式

本节只讨论材料是弹性的静定结构的位移计算

根据内力，求出相应的弯曲、拉伸和剪切应变，则由结构位移计算的一般公式 $\Delta=\sum\int(\overline{M}\kappa+\overline{F}_N\varepsilon+\overline{F}_Q\gamma_0)ds-\sum\overline{F}_{RK}c_K$

可得静定结构在荷载作用下弹性位移的一般公式：

$$\Delta=\sum\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}ds+\sum\int\frac{\overline{F}_N F_{NP}}{EA}ds+\sum\int\frac{k\overline{F}_Q F_{QP}}{GA}ds \quad (6-19)$$

M_P、F_{NP}、F_{QP}—实际荷载引起的内力；

$\overline{M}$、$\overline{F}_N$、$\overline{F}_Q$—虚设单位荷载引起的内力；

k—与截面形状有关的系数。矩形截面取6/5；圆形截面取10/9；薄壁圆环形截面取2；工字形或箱形截面取A/A1(A1为腹板面积)。

内力的正负号规定如下：

轴力 F_{NP} 、$\overline{F}_N$ —— 以拉力为正；

剪力 F_{QP} 、$\overline{F}_Q$ —— 使微段顺时针转动者为正；

弯矩 M_P 、$\overline{M}$ —— 只规定乘积 $M_P\,\overline{M}$的正负号。当$\overline{M}$与 M_P 使杆件同侧纤维受拉时，其乘积取正值。

二. 各类结构的位移计算公式

❑ 梁和刚架

在梁和刚架中，位移主要是弯矩引起的，轴力和剪力的影响较小，因此位移公式可简化为

$$\Delta = \sum \int \frac{\overline{M} M_P}{EI} ds \quad (6-20)$$

❑ 桁架

在桁架中，各杆只受轴力，而且每根杆的截面面积A以及轴力F_{NP}和$\overline{F}_N$沿杆长一般都是常数，因此位移公式可简化为

$$\Delta = \sum \int \frac{\overline{F}_N F_{NP}}{EA} ds = \sum \frac{\overline{F}_N F_{NP}}{EA} \int ds = \sum \frac{\overline{F}_N F_{NP}}{EA} l \quad (6-21)$$

❑ 桁梁混合结构

在桁梁混合结构中，一些杆件主要受弯曲，一些杆件只受轴力，故位移公式可简化为

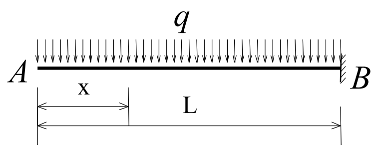
$$\Delta = \sum \int \frac{\overline{M} M_P}{EI} ds + \sum \frac{\overline{F}_N F_{NP}}{EA} l \quad (6-22)$$

三. 各类结构的位移计算公式

梁的位移

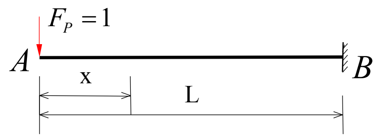
【例6.1】求图示矩形截面悬臂梁在A端的竖向位移。

解: 取A点为坐标原点，先求实际荷载作用下任意截面x的内力，再求虚设单位荷载作用下任意截面x的内力。



实际荷载

$$\begin{cases} M_P = -\frac{1}{2}qx^2 \\ F_{NP} = 0 \\ F_{QP} = -qx \end{cases}$$



虚设单位荷载

$$\begin{cases} \overline{M} = -x \\ \overline{F}_N = 0 \\ \overline{F}_Q = -1 \end{cases}$$

$$\Delta = \sum\int \frac{\overline{M}M_P}{EI}ds + \sum\int \frac{\overline{F}_N F_{NP}}{EA}ds + \sum\int \frac{k\overline{F}_Q F_{QP}}{GA}ds$$

$$= \int_0^l \frac{(-x)(-\frac{1}{2}qx^2)}{EI}dx + 0 + \int_0^l \frac{6}{5}\frac{(-1)(-qx)}{GA}dx = \frac{ql^4}{8EI} + \frac{0.6ql^2}{GA}$$

求解步骤:

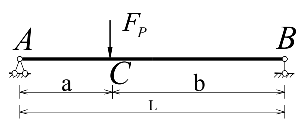
（1）求实际荷载作用下任意截面x的内力方程;

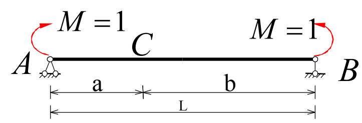
（2）求虚设单位荷载作用下任意截面x的内力方程;

（3）代入静定结构在荷载作用下的位移计算公式进行计算。

【例6.2】 图示简支梁受集中荷载作用。试求梁两端截面A、B的相对转角。

解:





实际荷载作用下的内力为

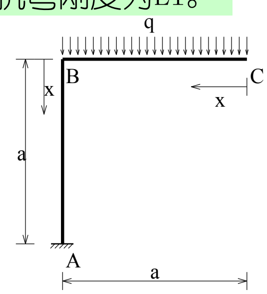
$$M_P=\frac{F_Pb}{l}x \quad (0<x<a) \quad M_P=F_Pa\left(1-\frac{x}{l}\right) \quad (a<x<l)$$

虚设单位荷载作用下的内力为 $\overline{M}=1 \quad (0<x<l)$

相对转角 $\Delta=\sum\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}ds=\int_0^a\frac{F_Pb}{EIl}xdx+\int_a^l\frac{F_Pa}{EI}\left(1-\frac{x}{l}\right)dx=\frac{F_Pab}{2EI}$

刚架的位移

【例6.3】 求图示刚架C端的角位移。已知抗弯刚度为EI。

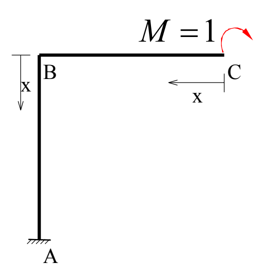


解: 实际荷载作用下的内力为:

CB杆 $M_P=-\frac{1}{2}qx^2$ BA杆 $M_P=-\frac{1}{2}qa^2$

虚设单位荷载作用下的内力为

CB杆 $\overline{M}=-1$ BA杆 $\overline{M}=-1$



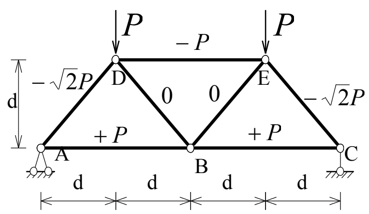
角位移 $\Delta=\int_0^a\frac{(-1)(-\frac{1}{2}qx^2)}{EI}dx$

$$+\int_0^a\frac{(-1)(-\frac{1}{2}qa^2)}{EI}dx=\frac{2qa^3}{3EI}$$

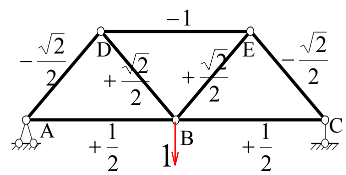
桁架的位移

【例6.4】 求桁架结点B的竖向位移。

解:



实际荷载作用下的内力图



虚设单位荷载作用下的内力图

$$\Delta_{By}=\sum\int\frac{\overline{F}_N F_{NP}}{EA}ds=\sum\frac{\overline{F}_N F_{NP}}{EA}l$$

$$=\frac{1}{EA}\left[(-\sqrt{2}P)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\sqrt{2}d+P\times\frac{1}{2}\times 2d\right]\times 2+\frac{1}{EA}(-P)(-1)\times 2d$$

$$=6.83\frac{Pd}{EA}$$

§6-5 图乘法

一. 图乘法

对于等截面直杆(包括截面分段变化阶梯形的杆件)所组成的梁和刚架，在位移计算中，均可采用图乘法来代替积分运算。

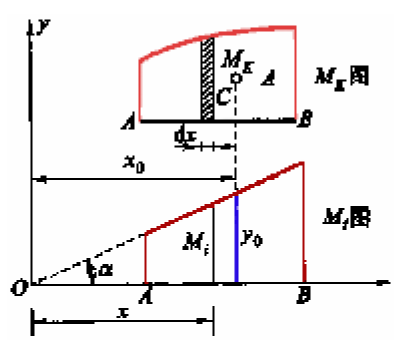
应用图乘法的条件：(1)杆轴为直线；(2)EI＝常数；(3) $\overline{M}$ 图和 M_P图中至少有一个为直线图形。

$$\Delta=\sum\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}ds=\sum\int\frac{M_iM_k}{EI}ds$$

$$=\sum\frac{1}{EI}\int_A^B(x\tan\alpha)M_k dx$$

$$=\sum\frac{1}{EI}\tan\alpha\cdot Ax_0$$

$$=\sum\frac{1}{EI}Ay_0 \qquad (6-27)$$



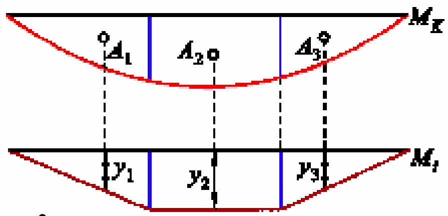
应用图乘法计算时要注意：

（1）杆段应是等截面直杆段，两个图形中至少应有一个是直线，标距y_0应取自直线图中。

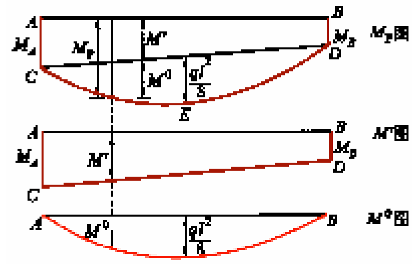
（2）正负号规则：面积A与标距y_0若在杆的同侧，乘积　取正号；异侧则取负号。

（3）如果一个图形是曲线，另一个图形是由几段直线组成的折线，则应分段考虑。

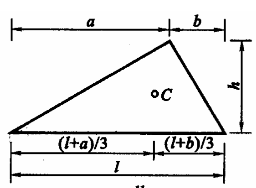
（4）如果图形比较复杂，则可将其分解为几个简单图形，分项计算后再进行叠加。



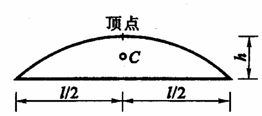
$$\int M_i M_k dx = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3$$



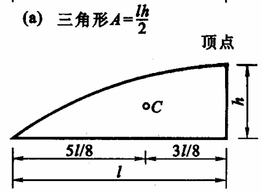
二. 几种常见图形的面积和形心位置



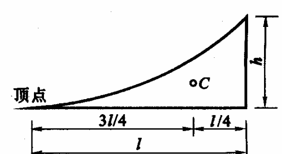
(a) 三角形 $A=\frac{lh}{2}$



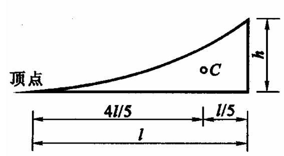
(b) 二次抛物线 $A=\frac{2}{3}lh$



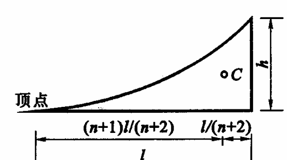
(c) 二次抛物线 $A=\frac{2}{3}lh$



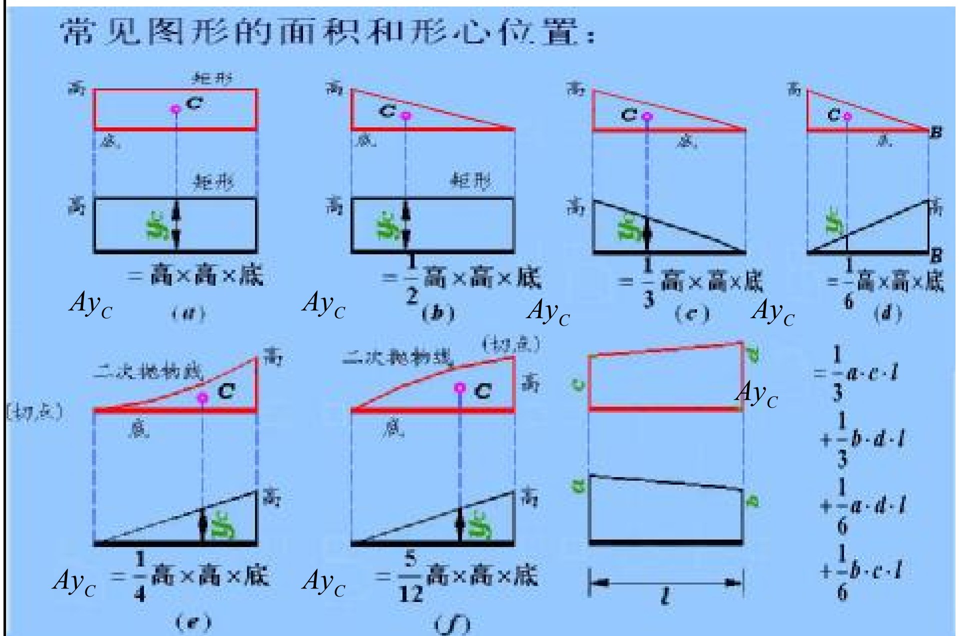
(d) 二次抛物线 $A=\frac{1}{3}lh$



(e) 三次抛物线 $A=\frac{1}{4}lh$

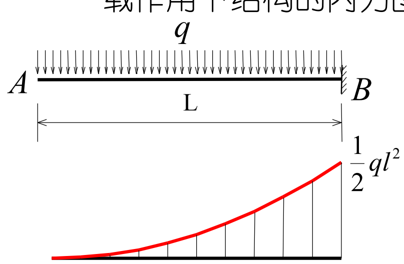


(f) n次抛物线 $A=\frac{1}{n+1}lh$

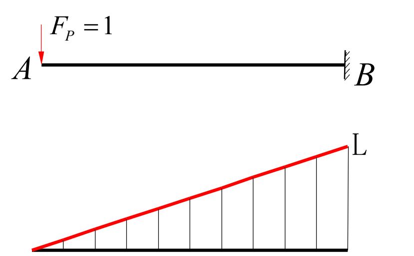


【例6.5】求图示矩形截面悬臂梁在A端的竖向位移。

解：先求实际荷载作用下结构的内力图，再求虚设单位荷载作用下结构的内力图。



实际荷载作用下的内力图

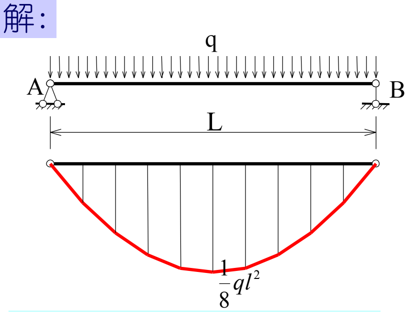


虚设单位荷载作用下的内力图

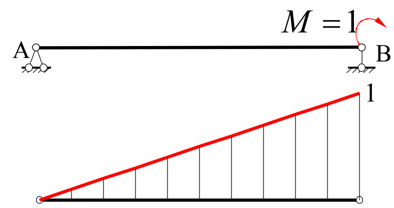
$$\Delta = \frac{1}{EI}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}ql^2\times l\times l = \frac{ql^4}{8EI}$$

【例6.6】 求图示简支梁在均布荷载作用下的B端转角。EI为常数。

解:



实际荷载作用下的内力图



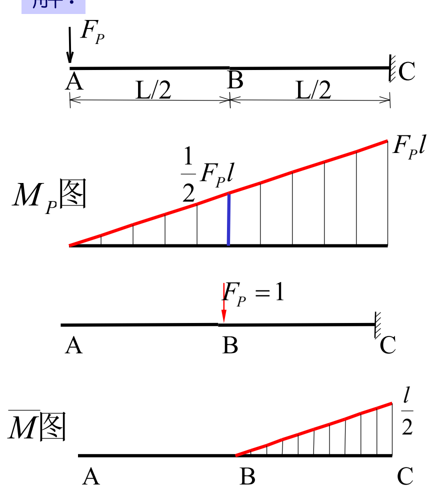
虚设单位荷载作用下的内力图

$$\Delta_B=\sum\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}ds=\frac{1}{EI}Ay_0$$

$$=-\frac{1}{EI}\left(\frac{2}{3}\times\frac{ql^2}{8}\times l\right)\times\frac{1}{2}=-\frac{ql^3}{24EI}$$

【例6.7】 图示悬臂梁，在A点作用集中荷载 F_P。试求中点B的挠度。 EI为常数。

解:



$$\Delta_B=\frac{1}{3}\times F_Pl\times\frac{l}{2}\times\frac{l}{2}$$

$$+\frac{1}{6}\times\frac{F_Pl}{2}\times\frac{l}{2}\times\frac{l}{2}$$

$$=\frac{5F_Pl^3}{48}$$

【例6.8】 求图示外伸梁在均布荷载作用下点C的挠度。EI为常数。

解：

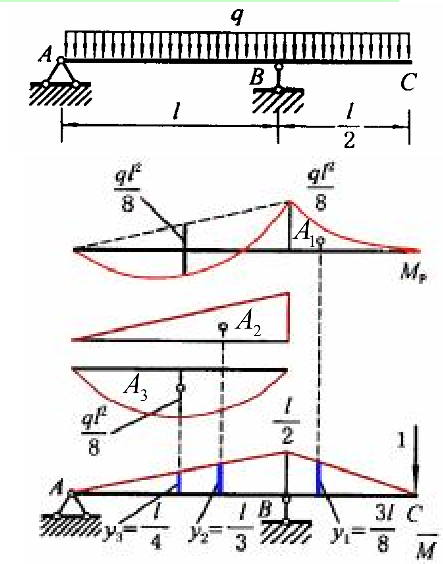
$$A_1 = \frac{1}{3}\times\frac{l}{2}\times\frac{ql^2}{8} \qquad y_1 = \frac{3}{4}\times\frac{l}{2}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\times l\times\frac{ql^2}{8} \qquad y_2 = \frac{2}{3}\times\frac{l}{2}$$

$$A_3 = \frac{2}{3}\times l\times\frac{ql^2}{8} \qquad y_3 = \frac{1}{2}\times\frac{l}{2}$$

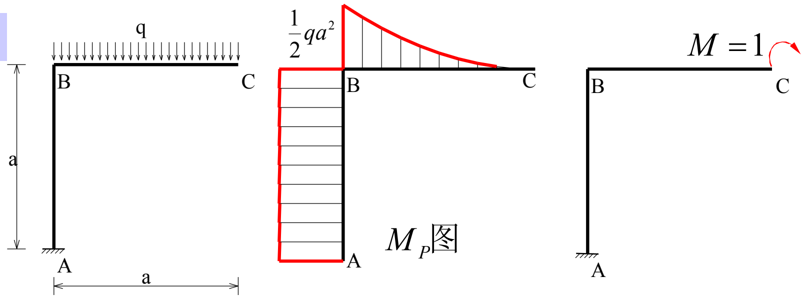
$$\Delta_C = \sum\int\frac{\overline{M}M_P}{EI}ds = \frac{1}{EI}\sum_{i=1}^{3}A_i y_i$$

$$= \frac{ql^4}{128EI}$$



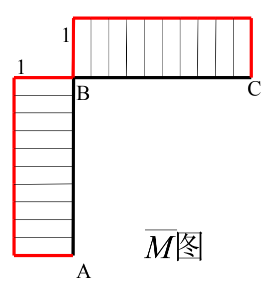
【例6.9】 求图示刚架C端的角位移。已知抗弯刚度为EI。

解：



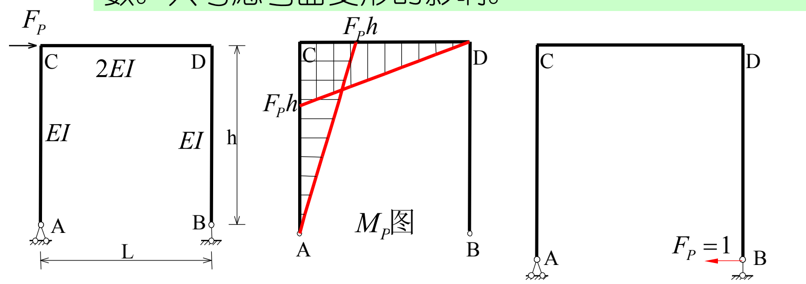
$$\Delta = \frac{1}{EI}\times\left(\frac{1}{3}\times a\times\frac{1}{2}qa^2\right)\times 1 + \frac{1}{EI}\times\frac{1}{2}qa^2\times 1\times a$$

$$= \frac{2qa^3}{3EI}$$



【例6. 10】求图示刚架在F_P作用下点B的水平位移。EI为常数。只考虑弯曲变形的影响。

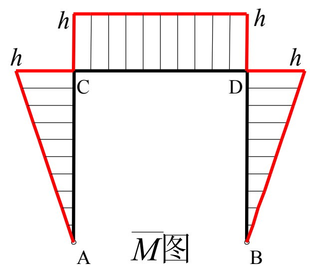
解:



$$\Delta_B=\frac{1}{EI}\sum_{i=1}^{3}A_iy_i=\frac{-1}{EI}\left(\frac{1}{3}\times F_Ph\times h\times h+0\right)$$

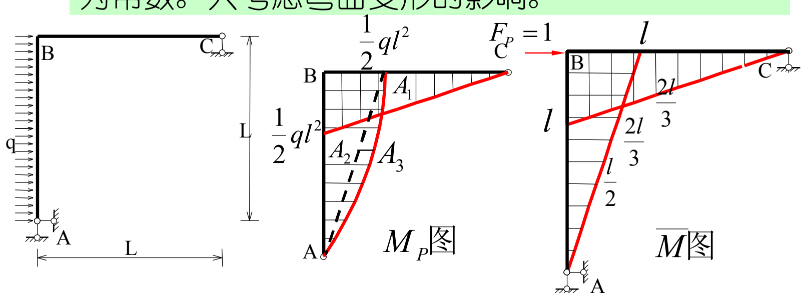
$$+\frac{-1}{2EI}\times\frac{1}{2}\times F_Ph\times h\times l$$

$$=-\frac{F_Ph^2}{12EI}(4h+3l)$$



【例6. 11】求图示刚架在均布荷载作用下点B的水平位移。EI为常数。只考虑弯曲变形的影响。

解:



$$A_1=\frac{1}{2}\times l\times\frac{ql^2}{2}\qquad y_1=\frac{2}{3}l$$

$$A_2=\frac{1}{2}\times l\times\frac{ql^2}{2}\qquad y_2=\frac{2}{3}l$$

$$A_3=\frac{2}{3}\times l\times\frac{ql^2}{8}\qquad y_3=\frac{l}{2}$$

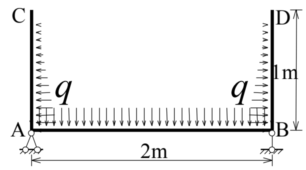
$$\Delta_{Bx}=\frac{1}{EI}\sum_{i=1}^{3}A_iy_i$$

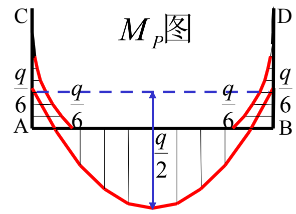
$$=\frac{1}{EI}\left(\frac{ql^3}{4}\times\frac{2}{3}l+\frac{ql^3}{4}\times\frac{2}{3}l+\frac{ql^3}{12}\times\frac{1}{2}l\right)$$

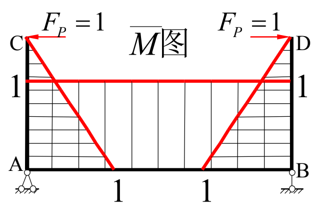
$$=\frac{3ql^4}{8EI}$$

【例6.12】求图示刚架在水压力作用下C、D两点的相对水平位移。EI为常数。

解：







杆AC和BD

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{4}\times 1\times\frac{q}{6} \qquad y_1 = y_2 = \frac{4}{5}\times 1$$

杆AB

$$A_3 = \frac{q}{6}\times 2-\frac{2}{3}\times\frac{q}{2}\times 2 \qquad y_3 = 1$$

$$\Delta_B = \frac{1}{EI}\sum_{i=1}^{3} A_i y_i = -\frac{4q}{15EI}$$