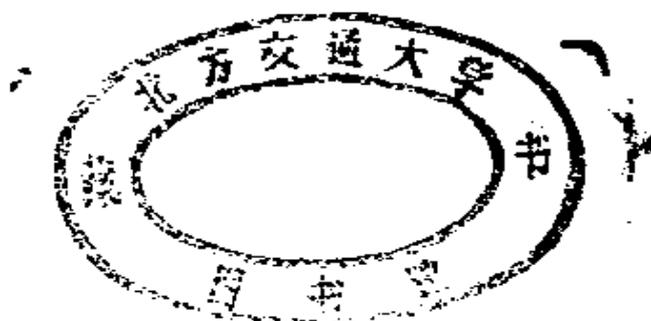


# 曲线梁桥结构分析

李惠生 张罗溪 编著



中国铁道出版社

1992年·北京



(京)新登字063号

## 内 容 提 要

本书综合了作者近年来的最新科研成果,比较系统地介绍了平面曲线连续梁、格子梁和预应力混凝土曲线连续箱形梁桥的计算理论和计算方法。主要内容为:第一章绪论;第二章薄壁杆件的弯曲与扭转;第三章直线连续箱形梁的扭转分析;第四章平面曲线梁的计算理论;第五章考虑翘曲作用的曲线格子梁理论;第六章预应力混凝土曲线箱形梁桥的空间分析。

读者对象:从事桥梁专业的工程技术人员,大学高年级学生、研究生和教师。

### 曲线梁桥结构分析

李惠生 张罗溪 编著

中国铁道出版社出版、发行

(北京市东单三条14号)

责任编辑 刘启山 封面设计 陈东山

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

---

开本: 850×1168毫米1/32 印张: 5.375 字数: 137 千

1992年1月 第1版 第1次印刷

印数: 1—3000册

---

ISBN7-113-01078-4/TU·235 定价: 3.15元

## 前 言

随着我国的改革、开放事业的进展，我国的道路交通和城市建设也有了迅速的发展。在一些大城市中，已经修建了许多立交桥和高架桥。这些立交桥和高架桥不仅为缓解所在城市的交通起了重要作用，而且为所在城市增添了环境美，展现了人们新的精神面貌。

曲线梁桥是立交桥和高架桥中的基本结构形式。由于曲线梁中的弯扭耦合，其结构分析要比直线梁的结构分析复杂得多。因此，在曲线桥的设计中，设计者首先遇到的麻烦就是计算问题。特别是由于预应力混凝土曲线箱形梁桥的广泛应用，设计者对这种复杂的空问受力结构的计算理论、计算方法和计算程序的需要越来越迫切。目前，国内还没有推出比较完整比较实用的计算理论和计算方法，更缺乏实用的计算程序。在这种复杂的桥梁结构设计中，设计者往往要花很大的精力用类似于SAP5这样的大型结构分析程序做结构计算，不仅设计效率低，而且还不能很准确地反映曲线梁桥，尤其是在预应力作用下的混凝土曲线梁桥的受力特性。

近年来，我国在曲线梁桥尤其是预应力混凝土曲线连续箱形梁桥的结构分析方面有了很多研究和探讨，特别是提出了适合于预应力混凝土曲线连续箱形梁桥或格子梁桥的空间曲梁计算理论和预应力的数值分析方法。这一成果经有关专家鉴定认为是国内领先的。本书主要结合我们几年来在这方面的一些科研成果、教学和指导毕业设计的经验、与设计单位合作的实践以及国内外有关文献资料而编写的。我们力求做到由浅入深，方便自学，理论联系实际。旨在为桥梁工程师们比较系统地介绍有关曲线梁桥结构分析的实用计算方法。同时本书可作为桥梁专业高年级学生和

研究生的专业选修教材以及教师参考用书。

本书介绍的有关计算理论和计算方法，已被编成计算机程序，并且在一些实际桥梁设计中得到应用，收到了较好的效果。读者如需要了解有关的计算机程序，可与作者联系。

由于作者水平有限，书中缺点错误难免。热忱希望读者批评指正。

作 者

1991年11月于石家庄铁道学院

# 目 录

主要符号 .....	1
第一章 绪 论 .....	4
第二章 薄壁杆件的弯曲与扭转 .....	7
第一节 概 述 .....	7
第二节 开口薄壁杆件的弯曲与扭转 .....	8
一、引 言 .....	8
二、基本关系式 .....	9
三、截面中应力 .....	14
四、扭转角微分方程 .....	20
第三节 箱形薄壁杆件的弯曲与扭转 .....	21
一、箱形薄壁杆件的弯曲 .....	21
二、箱形薄壁杆件的纯扭转 .....	24
三、单室箱形截面的翘曲扭转 .....	27
第四节 箱形截面的扭转微分方程 .....	31
第五节 扭转微分方程的初参数解 .....	35
参考文献 .....	38
第三章 直线连续箱形梁的扭转分析 .....	40
第一节 基本体系 .....	40
一、简支梁基本体系 .....	40
二、悬臂梁基本体系 .....	44
第二节 三翘曲双力矩方程 .....	49
第三节 翘曲双力矩分配法 .....	51
第四节 算 例 .....	54
参考文献 .....	58
第四章 平面曲线梁的计算理论 .....	60

第一节	曲线梁的纯扭转理论	60
一、	平衡微分方程	60
二、	位移与内力的关系	62
第二节	曲线箱形梁的翘曲扭转理论	64
一、	翘曲扭转微分方程	64
二、	翘曲扭转微分方程的初参数解	65
第三节	曲线简支梁的纯扭转分析	67
一、	用力法解一次超静定曲线简支梁	67
二、	曲线简支梁中的截面内力	71
三、	用传递矩阵法进行纯扭转分析	76
第四节	曲线箱形简支梁的翘曲扭转分析	87
一、	集中力 $P$ 和集中扭矩 $M_t$ 作用下的情形	88
二、	均布力 $p$ 和均布扭矩 $m_t$ 作用下的情形	94
三、	弯矩 $M_{i-1}$ 和 $M_i$ 作用于基本体系两端的情形	98
四、	双力矩 $B_{i-1}$ 和 $B_i$ 作用于基本体系两端的情形	97
第五节	曲线连续梁的纯扭转分析	106
一、	基本体系的变形系数 $\delta_{ii}$	106
二、	基本体系的荷载系数 $\delta_{ip}$	107
第六节	曲线连续梁的翘曲扭转分析	109
第七节	算 例	114
	参考文献	119
第五章	考虑翘曲作用的曲线格子梁理论	121
第一节	考虑翘曲作用的曲线薄壁箱形梁单元 之刚度矩阵	121
一、	柔度矩阵	121
二、	刚度矩阵	128
第二节	考虑翘曲作用的直线薄壁箱形梁单元 之刚度矩阵	129
	参考文献	133
第六章	预应力混凝土曲线箱形梁桥的空间分析	135

第一节	空间曲梁单元的刚度矩阵 .....	135
一、柔度矩阵 .....	135	
二、刚度矩阵 .....	138	
第二节	空间曲梁单元的等效节点力 .....	139
第三节	曲梁单元的坐标变换 .....	149
第四节	曲线梁桥中预应力的空间分析关系式 .....	150
第五节	曲线梁桥中预应力的数值分析方法 .....	153
参考文献	.....	155
附    录	.....	156

## 主要符号

$a, b$  简支梁上荷载作用点的坐标,  $a = R\beta, b = R\beta'$

$A_{xx}$  断面  $x$  方向有效剪切面积

$A_{yy}$  断面  $y$  方向有效剪切面积

$A$  断面面积

$C$  断面形心

$B = \int_A \sigma \omega dA$  翘曲双力矩

$E$  弹性模量

$E' = \frac{E}{1 - \mu^2}$

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  应变

$F$  箱形断面中心线所围的面积; 预应力; 柔度矩阵

$G$  剪切模量

$I_x = \int_A y^2 dA$  } 惯性矩

$I_y = \int_A x^2 dA$  }

$I_{xy} = \int_A xy dA$  惯性积

$I_{\omega x} = \int_A \omega x dA$  } 扇性惯性积

$I_{\omega y} = \int_A \omega y dA$  }

$I_p = \int_A \rho_0^2 dA$  相对于剪切中心的惯性矩

$i$  多室箱形断面中室的编号; 连续梁中跨度的编号

$K$  扭转常数; 刚度矩阵

$$k = \sqrt{\frac{\mu GK}{EI_0}} \quad \text{记号}$$

$l$  杆长, 跨长

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_A \sigma_x y dA \\ M_y &= \int_A \sigma_x x dA \end{aligned} \right\} \text{弯矩}$$

$M_z$  绕曲梁  $z$  轴切线旋转的力矩

$m_z$  匀布扭矩

$m_x, m_y$  匀布弯矩

$N$  轴向力

$p_x, p_y, p_z$  均布荷载

$S$  剪切中心

$q = \tau t$  剪力流

$\bar{q}$  当  $G\phi' = 1$  时的剪力流

$R$  曲线梁剪切中心的曲率半径

$S_x, S_y$  沿  $x, y$  方向的剪力

$$S_x^0 = \int_0^s \omega t ds \quad \text{断面截取部分扇性静矩}$$

$$S_x^{\hat{0}} = \int_0^s \hat{\omega} t ds \quad \text{箱形断面截取部分扇性静矩}$$

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \int_A x dA \\ S_y &= \int_A y dA \end{aligned} \right\} \text{截面静矩}$$

$T$  总扭矩

$T_1$  纯扭转扭矩

$T_0$  翘曲扭转扭矩

$t$  壁厚

$U$  应变能

$u$  沿法线方向位移

$V$  沿切线方向位移

$X$  多余未知力

$x, y$  断面的直角坐标

$z$  沿杆轴线方向坐标

$z, z'$  曲梁由左或右支座起沿剪切中心曲轴坐标, 其中  $z = R\theta$ ,

$$z' = R\theta'$$

$\alpha$  单跨曲线梁的中心角

$\beta, \beta'$  曲线梁中荷载作用位置的角度坐标

$\theta, \theta'$  曲线梁从左或从右支座量起的角度坐标

$$\mu = 1 - \frac{K}{I_0} \quad \text{记号}$$

$\mu$  泊松比

$\rho_0$  断面中心线上点的切线至剪切中心的垂距

$\sigma_x$  正应力

$$\phi = \beta + \frac{W}{R} \quad \text{曲线梁的总扭转角}$$

$\phi$  断面扭转角

$$\phi' = \frac{d\phi'}{dz} \quad \text{直杆单位扭转角}$$

$$\psi = \frac{2F}{\phi \frac{ds}{t}} \quad \text{扭转函数}$$

$\omega$  扇性坐标

$\omega_0$  主扇性坐标

$\wedge$  箱形断面的符号

## 第一章 绪 论

随着城市现代化建设的发展，城市交通系统压力越来越大。为了保证城市交通顺畅，迫切需要更新原有的道路设施和开辟新的交通线。由于受周围环境的限制，在繁忙地段修建立交桥和高架桥是缓解城市交通紧张状况的一项有效措施。在立交桥和高架桥中，要求桥梁轴线服从线路要求，在平面上呈曲线形，以提供顺畅的交通线。在公路和铁路建设中，由于总体选线的需要或限于地形、地物，有些情况下也需要修建曲线桥梁，以满足交通运营要求，并节省建设投资。

曲线梁（又称为弯梁）桥不仅能很好地适应桥址受地形地物限制的需要，而且由于曲线结构线条平顺、流畅、明快、意境生动，能给人们以美的享受。这样设计的桥梁结构，能使建筑美与环境美协调一致，符合人们的审美要求。

由于曲线梁桥的广泛应用，设计者对这种结构的计算理论、计算方法和计算程序的需要越来越迫切。在曲线梁桥的设计中，设计者首先遇到的麻烦就是反映其结构性能的计算问题。如一根平面曲线梁在自重作用下（该荷载垂直于曲率平面），不仅产生竖向位移，而且还要产生扭转。这种弯曲与扭转的相互作用（即弯扭耦合）与梁的几何形状和弯扭刚度的比率有关。

刚开始建造曲线桥时，是用一系列直线梁当作弦做成折线形的。这是由于设计者还没有掌握曲线梁的受力特性和计算方法。70年代以来，由于有限元方法的推广和应用以及电子计算机的发展，基本上解决了曲线结构的计算问题，曲线连续梁桥得到了广泛应用。同时，曲线梁桥的计算理论也有较大的发展。

由于预应力梁能增大跨度，降低梁高，近年来，预应力混凝土曲线箱形梁被越来越多地采用。但是，曲线梁在预加力作用下

是一复杂的空间受力结构。目前,国内外都还没有推出比较完整比较实用的计算理论和计算方法。而且,对这方面的试验研究也很不够。在这种复杂的桥梁结构设计中,设计者不得不花很大的精力用类似于SAP5这样的大型结构分析程序做结构计算。不但设计效率低,而且还不能很准确地反映曲线梁桥,尤其是在预加力作用下的曲线梁桥的受力性能。

箱形截面是曲线梁桥设计中常采用的截面形式。这是因为箱形截面具有抗扭刚度大、稳定性能好、材料利用充分而经济、结构合理、外形简洁和便于养护等优点。箱形截面杆件的扭转可分为纯扭转和翘曲扭转两种。纯扭转的概念和分析方法在材料力学教科书中有比较详细的论述,而翘曲扭转特性则还在不断研究中。

本书第二章介绍了直线薄壁杆件的弯曲与扭转的基本概念,包括开口截面和闭口截面的纯扭转与翘曲扭转。读者可从本章中熟悉有关翘曲扭转的基本知识。本章建立的薄壁杆件的翘曲扭转微分方程及其初参数解是第四章中薄壁曲线箱形梁翘曲扭转分析的基础。

第三章介绍了薄壁直线连续梁扭转分析的两种实用计算方法。文中首先分析了简支梁和悬臂梁两种基本体系,运用边界条件求出其初参数解。然后分别应用三翘曲双力矩方程求解方法和翘曲双力矩分配法,把第二章所述薄壁结构的翘曲扭转理论与桥梁结构的实际应用结合起来。

第四章比较系统地介绍了平面曲线梁的计算理论。其中包括曲线梁桥的纯扭转理论和翘曲扭转理论。与直线梁不同的是,曲线梁要考虑弯扭耦合作用。本章对单跨曲线简支梁作了详细的分析。单跨曲线简支梁是多跨曲线连续梁结构分析中的基本体系。由纯扭转理论导出了曲线连续梁的三弯矩方程,这是曲线连续梁结构分析的一种适合于手算的实用计算方法。

第五章介绍了考虑翘曲作用的曲线格子梁理论。在实际应用中,往往由于受地形地物的限制,需要把桥梁做成斜交的,而格

子梁能比较好地适应斜交的边界条件。本章介绍的理论适合于曲线连续箱形梁桥、曲线格子箱形梁桥的翘曲扭转分析。

第六章介绍了适合于预应力混凝土曲线连续箱形梁桥结构分析的空间曲梁计算理论和预加力荷载的数值分析方法。计算理论包括空间曲梁的单元刚度矩阵和这种曲梁单元在任意空间荷载作用下的单元等效节点力。曲梁单元等效节点力使得曲线梁桥的结构计算变得象直线桥一样方便，特别是为预应力混凝土曲线箱形梁桥的数值分析奠定了基础。对于箱形截面，考虑了截面剪心和形心不在同一点时对预应力效应的影响。

## 第二章 薄壁杆件的弯曲与扭转

### 第一节 概 述

在工程实践中，为了合理使用材料，工程结构常采用横截面为开口薄壁杆件或箱形闭口薄壁杆件。

我们知道，受弯杆件只有当横向荷载通过横截面剪切中心时，杆件才只产生弯曲。否则，杆件在弯曲的同时，还将产生扭转。

利用功的互等定理，很易证明，杆件受扭转时，横截面是绕剪切中心转动的。所以横截面的剪切中心又称为扭转中心。

剪切中心的位置是由杆件横截面的几何形状所决定的，而与外荷载的大小或类型全然无关。剪力流  $q$  沿  $x$ ， $y$  两方向的合力  $Q_x$ ， $Q_y$  的作用线交点就是横截面的剪切中心。

圆形实体截面的等直杆受扭时的应力和位移，是最简单的扭转问题。它在扭矩作用下横截面保持平面形状，称为纯扭转。

非圆形截面杆件在扭矩作用下，横截面不保持平面而要发生翘曲。如果各个横截面翘曲程度不同，这将在横截面上引起附加的正应力与剪应力。实体截面杆件中，这种附加应力很小，但在薄壁杆件中却是很重要的。

在图 2—1 (a) 中，扭转时，杆件截面不保持平面而发生翘曲，但各个截面的翘曲变形是相同的，即各个截面上相应点在扭转时产生的轴向位移是相同的。原来长度相等的两个线段  $ab$  和  $a_1b_1$ ，在扭转变形后，仍保持相等，且  $aa_1 = bb_1$ 。由于杆件各截面能自由翘曲，所以截面上没有附加正应力和剪应力，而只有纯扭转产生的剪应力，并且各个截面的剪应力分布相同。以上这种情况也属于纯扭转。

在图 2—1 (b) 中，所示杆件左端是固定端，扭转时不能：

自由翘曲，所以它将阻止其他截面自由翘曲。而在右端的自由端，其翘曲变形为最大，于是各横截面翘曲情况都不相同，原来相等的线段 $ab$ 和 $a_1b_1$ ，扭转后 $ab \neq a_1b_1$ ，并且 $aa_1 \neq bb_1$ 。

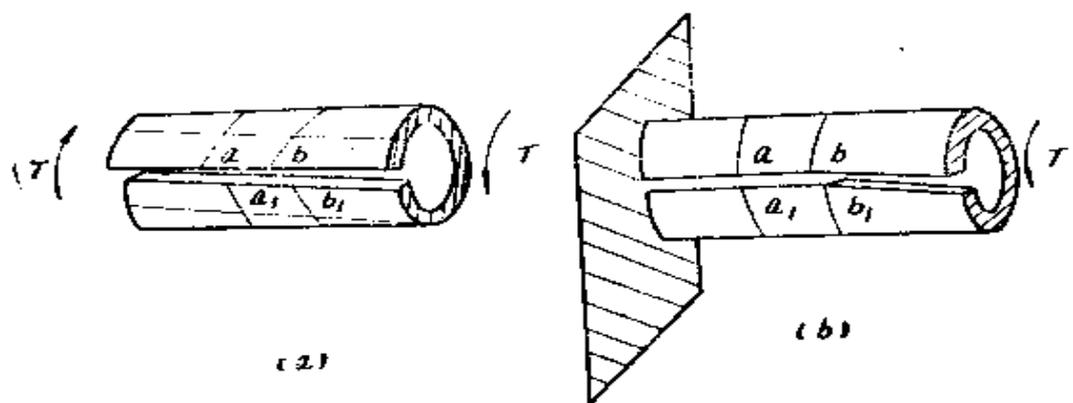


图 2-1 (a) 纯扭转，(b) 翘曲扭转。

薄壁杆件扭转时，由于受到约束或其他原因，使截面不能自由翘曲，那么，杆件任意两截面间的纵向纤维就要伸缩。因此，截面上要产生法向应力。而这些翘曲法向应力的变化又将引起翘曲剪应力，此种扭转称为翘曲扭转，又称为约束扭转。

薄壁杆件的扭转通常表现为纯扭转与翘曲扭转的组合。完全的纯扭转只有同时符合下述三个条件时才有可能产生，即是等截面直杆，仅在其两端截面上施加扭矩，而且两端又不存在对于翘曲变形的任何外加限制。

本书后面在介绍计算方法时，区分为纯扭转理论和翘曲扭转理论两种。前者适用于截面翘曲反应所引起的正应力和剪应力，与基本弯曲和纯扭转对应的应力值相比甚小时，即忽略截面的翘曲影响。而后者则考虑纯扭转与翘曲扭转的组合。

## 第二节 开口薄壁杆件的弯曲与扭转

### 一、引言

等截面开口薄壁杆件在横向荷载、轴向荷载以及扭矩等外力作用下，杆件将发生弯曲、拉压以及扭转变形。相应地，截面中

将产生弯曲应力、拉压应力以及扭转应力。

截面上产生的正应力 $\sigma_z$ 可表示为：

$$\sigma_z = \sigma_N + \sigma_b + \sigma_w \quad (2-2-1)$$

式中  $\sigma_N$ ——轴向力产生的正应力，  
 $\sigma_b$ ——弯曲产生的正应力，  
 $\sigma_w$ ——翘曲产生的正应力。

而剪应力 $\tau_{zs}$ 可表示为

$$\tau_{zs} = \tau_b + \tau_t + \tau_w = \tau_s + q/t \quad (2-2-2)$$

式中  $\tau_b$ ——弯曲剪应力，  
 $\tau_t$ ——纯扭转剪应力，  
 $\tau_w$ ——翘曲剪应力，  
 $q$ ——单位长度上的剪力，称为剪力流。

剪力流的正方向与坐标 $s$ 的正方向一致。它们的分布情况见图2-2。

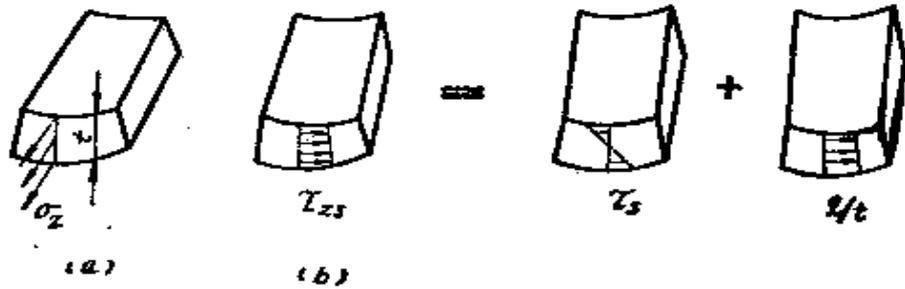


图 2-2 (a) 正应力，(b) 剪应力。

## 二、基本关系式

### (一) 单元体平衡条件

首先我们建立直角坐标系 $xyz$ 和正交曲线坐标系 $n, s, z$ ，如图2-3所示。 $C$ 为杆件形心， $x, y, z$ 不一定是主轴。 $s$ 为截面壁厚中心线坐标，以逆时针量度为正。它的起点可在截面合适的位置上任意选择，对开口薄壁杆件一般宜选在截面的边缘。 $n$ 为法向坐标，以外法向为正。

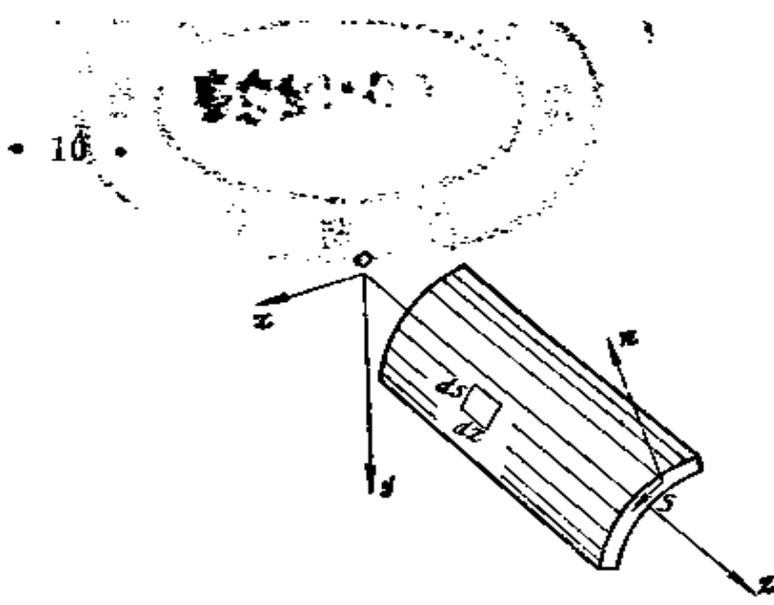


图 2-3 坐标系

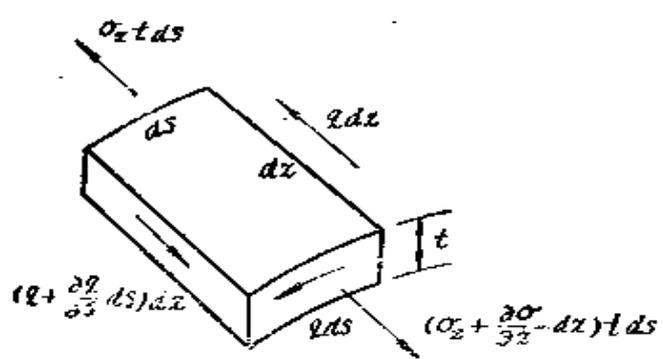


图 2-4 单元体的平衡

为了研究单元体的平衡，我们从薄壁杆件中截取壁厚为  $t$  的单元体  $ds \times dz$ 。由于  $\tau$  引起的在  $Z$  轴方向的剪应力自相平衡。按平衡条件，图 2-4 中诸力沿  $Z$  轴方向合力为零。所以

$$\left( \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) t ds - \sigma_z t ds + \left( q + \frac{\partial q}{\partial s} ds \right) dz - q dz = 0$$

简化后得到

$$\frac{\partial q}{\partial s} + t \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (2-2-3)$$

这就是单元体平衡条件。

(二) 应变位移协调条件

由正应力  $\sigma_z$  产生正应变  $e_z$ ，而剪应力  $\tau$  产生剪应变—— $\gamma$  ( $\gamma_z$ )

$=\gamma_{xz}$ )。对于小变形, 应变-位移的关系是线性的, 其正应变  $e_z$  可用纵向位移  $W$  对  $Z$  的偏导数表示,

$$e_z = \frac{\partial W}{\partial z}$$

它定义为在杆轴方向长度的改变与原长的比值。

求剪应变可从杆件截面中间层中取出微块  $abcd$ ,  $sz$  平面内的角应变可用图 2-5 所示的角  $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$  之和表示。

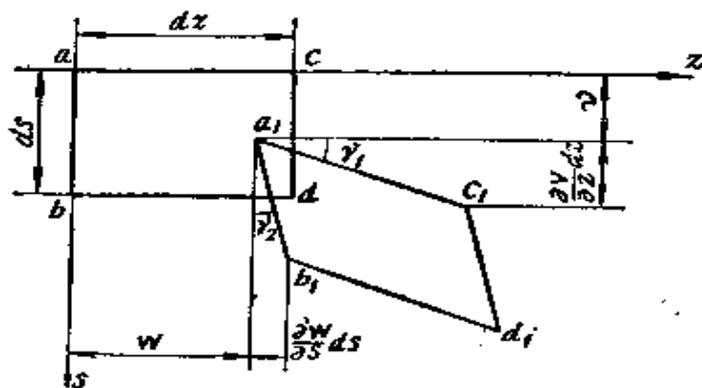


图 2-5 剪应变

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{V + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot dz - V}{dz} = \frac{\partial V}{\partial z} \\ \gamma_2 &= \frac{W + \frac{\partial W}{\partial s} ds - W}{ds} = \frac{\partial W}{\partial s} \end{aligned} \right\} \quad (2-2-4)$$

式中  $V$  ——切线方向的位移,  
 $W$  ——轴线方向的位移。

因此,

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial W}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial z} \quad (2-2-5)$$

### (三) 切向位移和法向位移

假定变形时截面的几何形状不变, 即杆件截面的外形在垂直于杆轴平面内的变形等于零, 截面上各点在  $xcy$  平面内的位移,

可以将截面当作刚体在  $xcy$  平面内作平面运动来求得。因此，截面上任意点在  $x$  与  $y$  方向的位移可以用该平面内某一点在  $x$  与  $y$  方向的位移及绕该点转动的角度来表示。通常我们从剪切中心（坐标  $x_0, y_0$ ）的位移来表示任一点位移。

现考虑截面上任一点  $P(x, y)$ ，它在  $x, y$  方向的位移  $\bar{\xi}$ 、 $\bar{\eta}$  可通过剪切中心在  $x, y$  方向的位移  $\xi$ 、 $\eta$  和绕  $O$  点的转动  $\phi$  来表示。当扭转角很小时， $\tan\phi \approx \phi$ ，由图 2—6 可推出  $P$  点总位移为：

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi} &= \xi - (y - y_0)\phi \\ \bar{\eta} &= \eta + (x - x_0)\phi \end{aligned} \right\} \quad (2-2-6)$$

以  $V$  代表  $P$  点切向位移， $u$  代表  $P$  点法向位移，它们的正向与  $s$ 、 $n$  一致， $\alpha$  代表  $P$  点外法线方向和  $x$  轴正向的交角，以逆时针为正，由图 2—6 不难看出位移  $U$  和  $V$  与位移  $\bar{\xi}$  和  $\bar{\eta}$  的关系为：

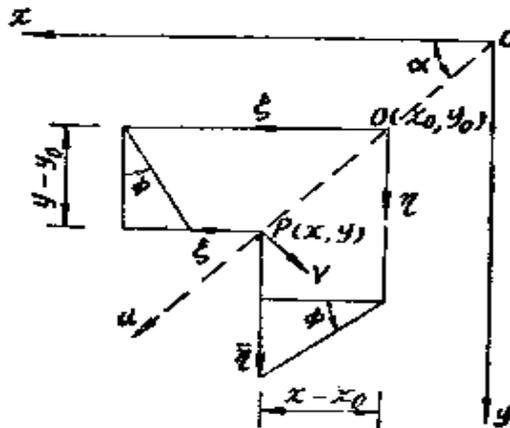


图 2—6 截面上任一点的位移

$$\left. \begin{aligned} U &= \bar{\xi} \cos\alpha + \bar{\eta} \sin\alpha \\ V &= -\bar{\xi} \sin\alpha + \bar{\eta} \cos\alpha \end{aligned} \right\} \quad (2-2-7)$$

将 (2—2—6) 式代入，于是

$$u = \xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha + [(x - x_0) \sin\alpha - (y - y_0) \cos\alpha] \phi$$

$$V = -\xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha + [(x - x_0) \cos\alpha + (y - y_0) \sin\alpha] \phi$$

从图 2—7 看出，从  $O$  点到  $P$  点的切线与法线的垂距分别是：

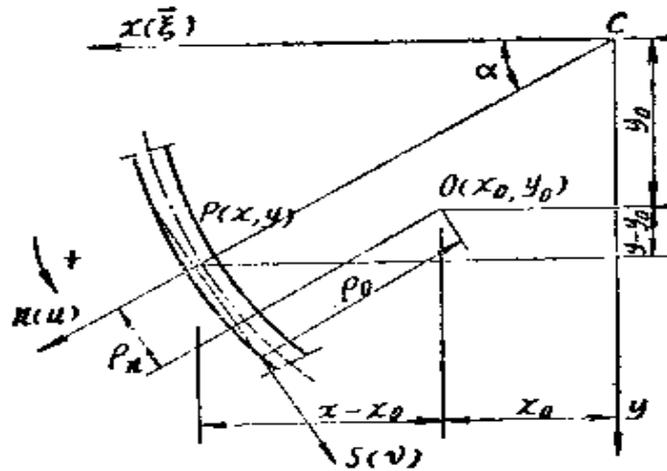


图 2-7 剪切中心至任一点  $P$  的切线与法线的垂距

$$\rho_n = (x - x_0) \sin \alpha - (y - y_0) \cos \alpha$$

$$\rho_o = (y - y_0) \sin \alpha + (x - x_0) \cos \alpha$$

将它代入上式，得到截面上任一点  $P$  切向位移和法向位移，

$$u = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha + \rho_n \phi$$

$$V = -\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha + \rho_o \phi \quad (2-2-8)$$

#### (四) 翘曲位移

根据开口薄壁杆件在约束扭转时中间层上的材料不承受剪切，即剪切变形等于零的假定，于是，由 (2-2-3) 式表示的  $\gamma_{xz} = 0$ ，即

$$\frac{\partial W}{\partial s} = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (2-2-9)$$

考虑到  $u$ 、 $V$ 、 $\phi$  是  $z$  的函数，从图 2-7 可见

$$\frac{dx}{ds} = -\sin \alpha$$

$$\frac{dy}{ds} = \cos \alpha$$

式 (2-2-8) 表示的  $V$  对  $z$  求导后得

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \xi' \frac{dx}{ds} + \eta' \frac{dy}{ds} + \phi' \rho_o$$

将此式代入 (2-2-9) 式, 并对  $s$  积分得

$$W = -\xi' x - \eta' y - \phi' \omega_0 + \bar{W}(z) \quad (2-2-10)$$

其中  $\bar{W}(z)$  —— 对  $s$  积分而得的积分常数

$\omega_0 = \int_0^s \rho_0 ds$  ——  $P$  点的扇性坐标。  $\rho_0 ds$  是以剪切中心  $O$  为极点、  $P_0$  为高、  $ds$  为底的扇性面积的 2 倍, 见图 2-8。

公式 (2-2-10)

前两项为杆件初等弯曲理论中之平截面假定, 后两项表示截面因受轴向力和扭转而不保持平面, 产生翘曲。

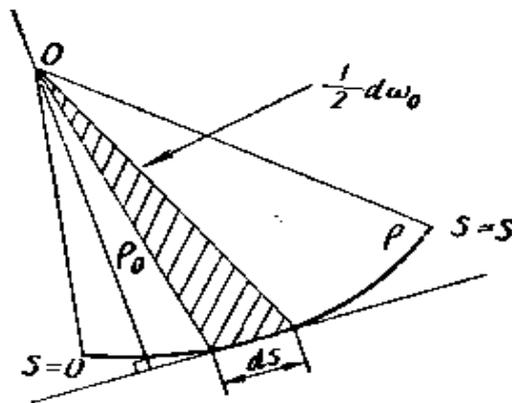


图 2-8 以剪切中心  $O$  为极点的扇性面积

### 三、截面中应力

#### (一) 正应力 $\sigma_z$

在弹性阶段, 可以运用虎克定律

$$\sigma_z = E \varepsilon_z = E \frac{\partial W}{\partial z}$$

现将 (2-2-10) 式求导后代入上式

$$\sigma_z = E \left[ -x \cdot \frac{d^2 \xi}{dz^2} - y \cdot \frac{d^2 \eta}{dz^2} - \omega_0 \frac{d^2 \phi}{dz^2} + \frac{d\bar{W}(z)}{dz} \right] \quad (2-2-11)$$

它要满足下列平衡条件

$$\int_A \sigma_z dA = N, \quad \int_A \sigma_z \cdot y dA = M_x, \quad \int_A \sigma_z \cdot x dA = M_y$$

把 (2-2-11) 式代入, 考虑到坐标轴通过形心, 即

$$\int_A x dA = 0, \quad \int_A y dA = 0 \text{ 得到}$$

$$\left. \begin{aligned} N &= EA \frac{d\bar{W}(z)}{dz} - ES\omega_0 \frac{d^2\phi}{dz^2} \\ M_x &= -EI_x \frac{d^2\eta}{dz^2} - EI_{xy} \frac{d^2\xi}{dz^2} - EI\omega_{0y} \frac{d^2\phi}{dz^2} \\ M_y &= -EI_{xy} \frac{d^2\eta}{dz^2} - EI_y \frac{d^2\xi}{dz^2} - EI\omega_{0x} \frac{d^2\phi}{dz^2} \end{aligned} \right\}$$

解上式得到:

$$\frac{d\bar{W}(z)}{dz} = \frac{N}{EA} + \frac{S\omega_0}{A} \frac{d^2\phi}{dz^2} \quad (2-2-12)$$

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} = -\frac{M_y I_y - M_x I_{xy}}{E(I_x I_y - I_{xy}^2)} - \frac{I_x I\omega_{0x} - I_{xy} I\omega_{0y}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \frac{d^2\phi}{dz^2} \quad (2-2-13)$$

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} = -\frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{E(I_x I_y - I_{xy}^2)} - \frac{I_y I\omega_{0y} - I_{xy} I\omega_{0x}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \frac{d^2\phi}{dz^2} \quad (2-2-14)$$

式中  $I_x = \int_A y^2 dA$ ,  $I_y = \int_A x^2 dA$  为惯性矩;

$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA$  为惯性积;

$I_{\omega_0 x} = \int_A \omega_0 x dA$   
 $I_{\omega_0 y} = \int_A \omega_0 y dA$  } 为扇性惯性积;

$\int_A \omega_0 dA = S_{\omega_0}$  为整个截面积的扇性静矩。

式(2-2-11)中前二项显然为弯曲正应力。第三项为翘曲正应力。最后一项可能为翘曲正应力与轴向力产生的正应力之和,这与计算  $S_{\omega_0}$  值的  $S$  起点(称为扇性零点)有关,而使  $S_{\omega_0} = 0$  的点称为主扇性零点。我们把剪切中心称为主扇性极点。由主扇性极点和主扇性零点计算而得的扇性坐标,称为主扇性坐标,以  $\omega_0$  表示。这些扇性几何特性将在后面作进一步介绍。

式(2-2-11)中后二项应力显然应满足部分杆的平衡条

件，它不应组成对于横截面平面内任何轴的合力矩，即下列三式成立。

$$\begin{aligned} -E \frac{d^2 \phi}{dz^2} S_{\omega_0} + E \left( \frac{d\bar{W}(z)}{dz} - \frac{N}{EA} \right) \cdot \int_A dA &= 0 \\ -E \frac{d^2 \phi}{dz^2} I_{\omega_0 y} + E \frac{d\bar{W}(z)}{dz} \int_A y dA &= 0 \\ -E \frac{d^2 \phi}{dz^2} I_{\omega_0 x} + E \frac{d\bar{W}(z)}{dz} \int_A x dA &= 0 \end{aligned}$$

由以上分析，可知

$I_{\omega_0 y} = I_{\omega_0 x} = 0$ 。另外为使  $S_{\omega_0} = 0$ ，必然是  $N/EA = \frac{d\bar{W}(z)}{dz}$ ，其物理意义是在主扇性零点处， $\frac{d\bar{W}(z)}{dz}$  全部为轴向力  $N$  产生之正应力，而该处由翘曲所产生的正应力为零。

(2-2-12)、(2-2-13)、(2-2-14) 式简化为

$$\frac{d^2 \xi}{dz^2} = -\frac{M_y I_v - M_x I_{xy}}{E(I_x I_v - I_{xy}^2)} \quad (2-2-15)$$

$$\frac{d^2 \eta}{dz^2} = -\frac{M_x I_v - M_y I_{xy}}{E(I_x I_v - I_{xy}^2)} \quad (2-2-16)$$

$$\frac{d\bar{W}(z)}{dz} = \frac{P}{EA} \quad (2-2-17)$$

以(2-2-15)、(2-2-16)、(2-2-17)代入(2-2-11)式中

$$\begin{aligned} \sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x I_v - M_y I_{xy}}{I_x I_v - I_{xy}^2} \cdot y + \frac{M_y I_x - M_x I_{xy}}{I_x I_v - I_{xy}^2} \cdot x \\ - E \omega \frac{d^2 \phi}{dz^2} \end{aligned} \quad (2-2-18)$$

式中前三项是我们所熟知的非对称弯曲时的正应力，第四项是约束扭转所产生的，称为翘曲正应力，以  $\sigma_\omega$  表示：

$$\sigma_\omega = -E \omega \frac{d^2 \phi}{dz^2} \quad (2-2-19)$$

扇性正应力有它相应的内力，这个内力为翘曲双力矩，以  $B$  表

示，它的定义是

$$B = \int \sigma_{\omega} \omega_n dA \quad (2-2-20)$$

以(2-2-19)式代入上式，得到以扭转角 $\phi$ 表示的翘曲双力矩

$$B = -EI_{\omega_n} \phi'' \quad (2-2-21)$$

其中 $I_{\omega_n}$ 为扇性惯性矩，它的表达式是

$$I_{\omega_n} = \int_A \omega_n^2 dA$$

从(2-2-19)和(2-2-21)式我们可以求得以翘曲双力矩表示的翘曲正应力

$$\sigma_{\omega} = \frac{B}{I_{\omega_n}} \cdot \omega_n \quad (2-2-22)$$

因此(2-2-18)式亦可写成

$$\begin{aligned} \sigma_z = & \frac{N}{A} + \frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \cdot y + \frac{M_y I_x - M_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \cdot x \\ & + \frac{B}{I_{\omega_n}} \cdot \omega_n \end{aligned} \quad (2-2-23)$$

一般由外荷载可直接求出 $N$ 、 $M_x$ 、 $M_y$ ，而要求得 $B$ 必须先求出 $\phi$ ，以后我们将专门讨论这个问题。

为了说明双力矩的物理意义，我们举一个简单的例子。图2-9是一个杆件，四角四个加劲肋连接着三块薄板。为了简化，假定加劲肋承受正应力，腹板承受剪应力，我们把偏心荷载 $N$ 分解为四种情况的合成，如图2-9所示。

图中(b)、(c)、(d)分别为轴向拉伸，对 $x$ 轴的弯曲和 $y$ 轴的弯曲。(e)表示的力自相平衡，它们对 $x$ 轴和 $y$ 轴不产生弯矩，但它们分别在自身平面内形成弯矩 $M_1$ 和 $M_2$ ，这两个弯矩对剪切中心取矩，形成的力矩之矩，就是我们所定义的翘曲双力矩。

## (二) 剪应力 $\tau_{xy}$

截面剪应力由二部分组成，见图2-2

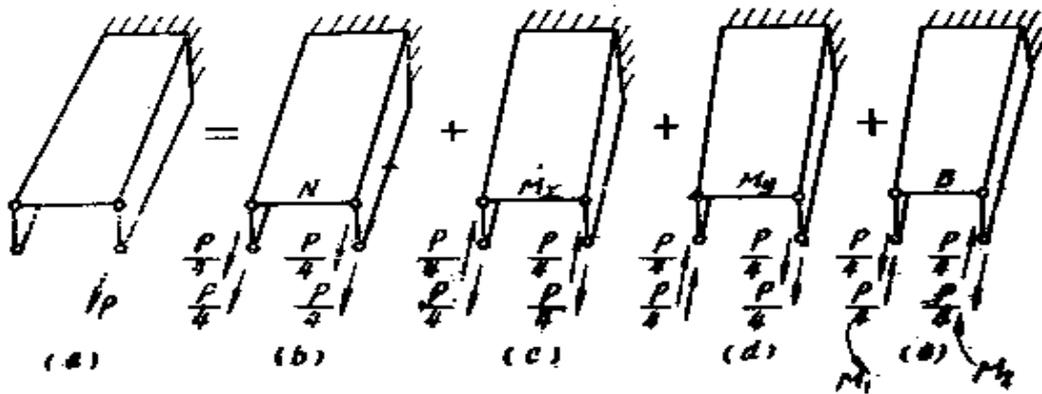


图 2-9 偏心荷载引起翘曲双力矩示意

$$\tau_{zs} = \tau_s + q/t \quad (2-2-23)$$

所以总扭转也有两部分组成:

$$T = T_s + T_w \quad (2-2-24)$$

$T_s$  是纯扭转剪应力  $\tau_s$  产生的,  $T_w$  是剪应力  $q/t$  产生的。

纯扭转时剪应力和扭转的关系式由材料力学中推导出。它是

$$\tau_s = Gt\phi' = T_s t / K, \text{ 即 } T_s = GK\phi' \quad (2-2-25)$$

式中  $K$  为纯扭转常数。

我们现在只需推导  $q/t$  和截面内力的关系。

由式 (2-2-3) 表示的单元体平衡条件可得到

$$\frac{\partial q}{\partial s} = -t \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$$

对  $S$  积分, 得到

$$q(s, z) = \bar{q}(z) - \int_0^s \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} t ds$$

其中  $\bar{q}(z)$  是坐标  $s$  起点的剪力流。当我们选择截面的自由端为  $s$  的零点时, 则当杆件边缘 ( $s=0$ ) 处无外力时  $\bar{q}$  变为零。于是

$$q = - \int_0^s \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} t ds \quad (2-2-26)$$

将 (2-2-18) 式表示的  $\sigma_z$  对  $z$  求导, 得

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{I_y \cdot y - I_{xy} \cdot x}{I_x I_y - I_{xy}^2} \cdot Q_y + \frac{I_x \cdot x - I_{xy} \cdot y}{I_x I_y - I_{xy}^2} \cdot Q_z - E \omega_z \frac{d^3 \phi}{dz^3}$$

其中,

$$Q_y = \frac{\partial M_x}{\partial z} \quad Q_z = \frac{\partial M_y}{\partial z}$$

将上式代入 (2-2-26), 解之得

$$q = -\frac{I_y \cdot S_y - I_{xy} \cdot S_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} \cdot Q_y - \frac{I_x \cdot S_x - I_{xy} \cdot S_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} \cdot Q_z + E \phi'' S_{\omega}^0 \quad (2-2-27)$$

把 (2-2-25) 和 (2-2-27) 式相加代回到 (2-2-2) 式, 得到全部剪应力, 即

$$\tau_{xz} = G t \phi' - \frac{I_y \cdot S_y - I_{xy} \cdot S_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} \cdot \frac{Q_y}{t} - \frac{I_x \cdot S_x - I_{xy} \cdot S_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} \cdot \frac{Q_z}{t} + E \phi'' S_{\omega}^0 / t \quad (2-2-28)$$

式中  $S_{\omega}^0 = \int_0^s \omega_n t ds$  —— 求算剪应力处的按主扇性坐标计算的扇性静矩。

(2-2-28) 式中第一项纯扭转剪应力, 第二、三项是弯曲剪应力, 第四项我们定义为翘曲剪应力, 用  $\tau_{\omega}$  表示,

$$\tau_{\omega} = E \phi'' S_{\omega}^0 / t \quad (2-2-29)$$

作用在杆件上的横向荷载通过静力等效原则可以化成通过剪切中心的横向荷载和剪切中心的扭矩, 因此弯曲引起的剪应力的合力通过剪切中心, 它对剪切中心没有力矩  $T$ , 整个截面  $q$  对剪切中心取矩, 只有翘曲剪应力一项起作用

$$T_{\omega} = \int_0^b q \rho_0 ds \quad (2-2-30)$$

利用  $\rho_0 ds = d\omega_n$ , 对上式进行分部积分。

$$T_{\omega} = q \omega_n \Big|_0^b - \int_0^b \omega_n dq$$

考虑杆件自由边剪力流为零的条件:

$$T_{\omega} = - \int_0^b \omega_{\omega} d(E \phi'' S_{\omega}^0) = -E \phi'' \int_0^b \omega_{\omega}^2 t ds$$

$$= -EI_{\omega_{\omega}} \phi'' \quad (2-2-31)$$

我们把  $T_{\omega}$  称为翘曲扭转力矩。

比较 (2-2-31) 式及 (2-2-21) 式, 可知

$$T_{\omega} = \frac{dB}{dz} \quad (2-2-32)$$

这与直梁弯曲时  $Q = \frac{dM}{dz}$  相似。

将 (2-2-31) 式代入 (2-2-29) 式得翘曲剪应力计算公式

$$\tau_{\omega} = - \frac{T_{\omega} \cdot S_{\omega}^0}{I_{\omega_{\omega}} \cdot t} \quad (2-2-33)$$

#### 四、扭转角微分方程

以上已得出了开口薄壁杆件受翘曲扭转时应力的计算公式

$$\sigma_{\omega} = \frac{B \cdot \omega_{\omega}}{I_{\omega_{\omega}}} \quad (2-2-22)$$

$$\tau_{\omega} = - \frac{T_{\omega} \cdot S_{\omega}^0}{I_{\omega_{\omega}} \cdot t} \quad (2-2-33)$$

以及相应的内力与扭转角导数之间的关系式

$$B = -EI_{\omega_{\omega}} \cdot \phi'' \quad (2-2-21)$$

$$T_{\omega} = -EI_{\omega_{\omega}} \phi'' \quad (2-2-31)$$

$$T_t = G \cdot K \cdot \phi' \quad (2-2-25)$$

为了求出计算应力所需的内力, 必须先求出  $\varphi$ , 所以要研究扭转角的微分方程式

总扭矩可由 (2-2-25) 式和 (2-2-31) 式相加而得

$$T = GK \phi' - EI_{\omega_{\omega}} \phi'' \quad (2-2-34)$$

这就是扭转控制微分方程

当杆件上承受均布外荷载 $m_z$ 时,可根据图(2-10)从平衡条件得出 $T$ 和 $m_z$ 之间的关系(图上 $m_z$ 、 $T$ 均为正向):

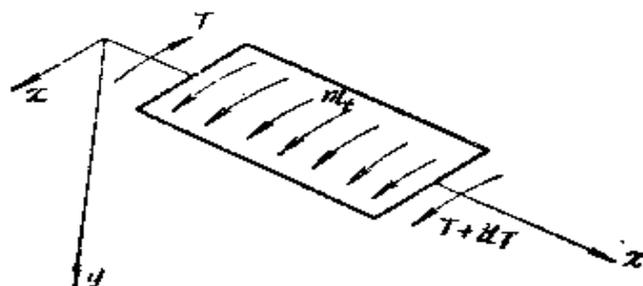


图 2-10 均布外扭矩 $m_z$

$$\frac{dT}{dz} = -m_z \quad (2-2-35)$$

把(2-2-34)式对 $z$ 求导一次,得

$$EI_{\omega\omega} \phi''' - GK \phi'' = m_z \quad (2-2-36)$$

现在我们可以把开口薄壁杆件弹性阶段的控制微分方程整理如下:

$$\frac{d^2 \xi}{dz^2} = -\frac{M_y I_x - M_x I_{xy}}{E(I_x I_y - I_{xy}^2)} \quad (2-2-15)$$

$$\frac{d^2 \eta}{dz^2} = -\frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{E(I_x I_y - I_{xy}^2)} \quad (2-2-16)$$

$$T = GK \phi' - EI_{\omega\omega} \phi'' \quad (2-2-34)$$

当我们把 $x$ 、 $y$ 轴取为断面形心主轴时, $I_{xy} = 0$ ,则上三式化为:

$$\left. \begin{aligned} M_y &= -EI_y \frac{d^2 \xi}{dz^2} \\ M_x &= -EI_x \frac{d^2 \eta}{dz^2} \\ T &= GK \phi' - EI_{\omega\omega} \phi'' \end{aligned} \right\} \quad (2-2-37)$$

### 第三节 箱形薄壁杆件的弯曲与扭转

#### 一、箱形薄壁杆件的弯曲

箱形截面弯曲正应力的计算与梁弯曲的初等理论相同。但考

虑通常采用的箱形截面其盖板较宽，在计算弯曲应力时必须注意到“剪力滞后”现象，并按宽翼缘梁的理论计算盖板的有效宽度。

箱形截面弯曲剪应力的计算与开口截面不同。下面将着重介绍单室和多室箱形截面弯曲剪应力的计算办法。

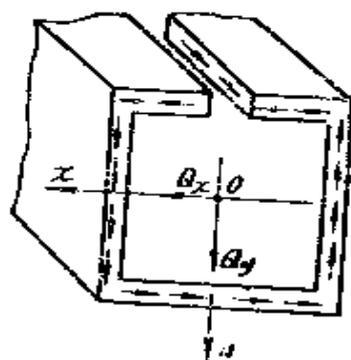


图 2—11 单室箱形截面受弯曲时的剪应力

### (一) 单室截面

图 2—11 所示一单室箱形截面杆件。假设横向外力  $Q_x$  和  $Q_y$  的作用线通过截面的剪切中心  $O$ ，则杆件在发生弯曲的同时不发生扭转。为了计算单室箱形截面中的弯曲剪力流，我们先在截面任一位置虚构一切口，使它变成开口截面。此时，由外荷载产生的剪力流，可按开口截面公式求出，其值在切口处为零（因此处为自由边缘）。实际上闭口截面在虚构的切口处剪力流并不为零。为了使切口恢复闭合，必须在切口处作用一附加剪力流，这一附加剪力流沿截面壁厚中心线系均匀分布，并规定坐标  $s$  的正向为它的正向。于是，单室箱形截面总的剪力流  $q$  应由开口截面剪力流  $q_0$  与这附加剪力流  $q_1$  叠加而得：

$$q = q_0 + q_1 \quad (2-3-1)$$

由切口处两对应面相对位移为零的条件得到剪应变  $\gamma$  沿周边的积分为零，即

$$\oint \gamma ds = 0 \quad (2-3-2)$$

将式 (2—3—1) 代入式 (2—3—2)，并考虑  $\gamma = q/Gt$  得

$$\oint \frac{q_0}{Gt} ds + q_1 \oint \frac{ds}{Gt} = 0 \quad (2-3-3)$$

由此解出附加剪力流为

$$q_1 = - \oint \frac{q_0}{t} ds / \oint \frac{ds}{t} \quad (2-3-4)$$

将式 (2—3—4) 求得的附加剪力流代入式 (2—3—1) 得

到单室截面的实际弯曲剪力流。

(二) 多室截面

图 2—12 示一多室截面， $i$  代表  $1 \sim n$  室， $k$  代表与  $i$  室相邻的室。今在各室中虚构一切口并在切口处作用一与扭矩正方向相同的附加剪力流  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )。于是，在  $i$  室与  $k$  室相邻的室壁中产生的附加剪力流  $q_{ik}$  显然具有相反的方向，它的数值等于  $i$  室与  $k$  室两个附加剪力流  $q_i$  与  $q_k$  的差即

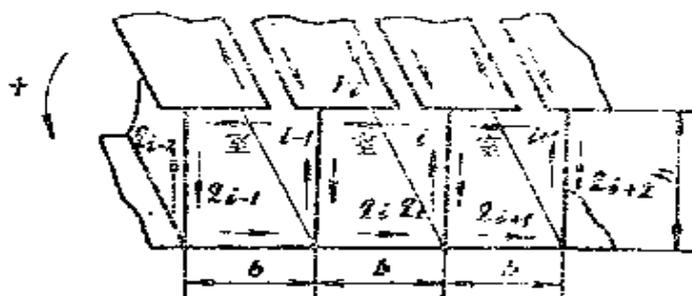


图 2—12 多室箱形截面受弯曲时的剪应力

$$q_{ik} = q_i - q_k \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = \text{与 } i \text{ 室相邻的室}) \quad (2-3-5)$$

根据各室的变形协调条件 (2—3—2) 式，我们得到下面  $n$  个线性方程组：

$$\oint_i \frac{q_0}{Gt} ds + q_i \oint_i \frac{ds}{Gt} - \sum_k q_k \oint_{ik} \frac{ds}{Gt} = 0 \quad (2-3-6)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; k = \text{与 } i \text{ 室相邻的室})$$

由上面  $n$  个线性方程组可以解出各室中的附加剪力流  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )，将它与各室开口截面中剪力流  $q_0$  相叠加得到多室闭口截面实际的弯曲剪力流。

$$q = q_0 + q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2-3-7)$$

由于我们认为弯曲剪应力沿壁厚系均匀分布，所以弯曲剪应力可表示为：

$$\tau = \frac{Q}{t}$$

## 二、箱形薄壁杆件的纯扭转

### (一) 单室箱形截面

图 2—13 (a) 示一等截面闭口薄壁杆件，两端受扭矩  $T$  作用，为纯扭转。坐标系如图所示。因壁厚  $t$  很小，故可假设剪应力  $\tau$  沿壁厚均匀分布， $\tau$  指向周边切线方向。

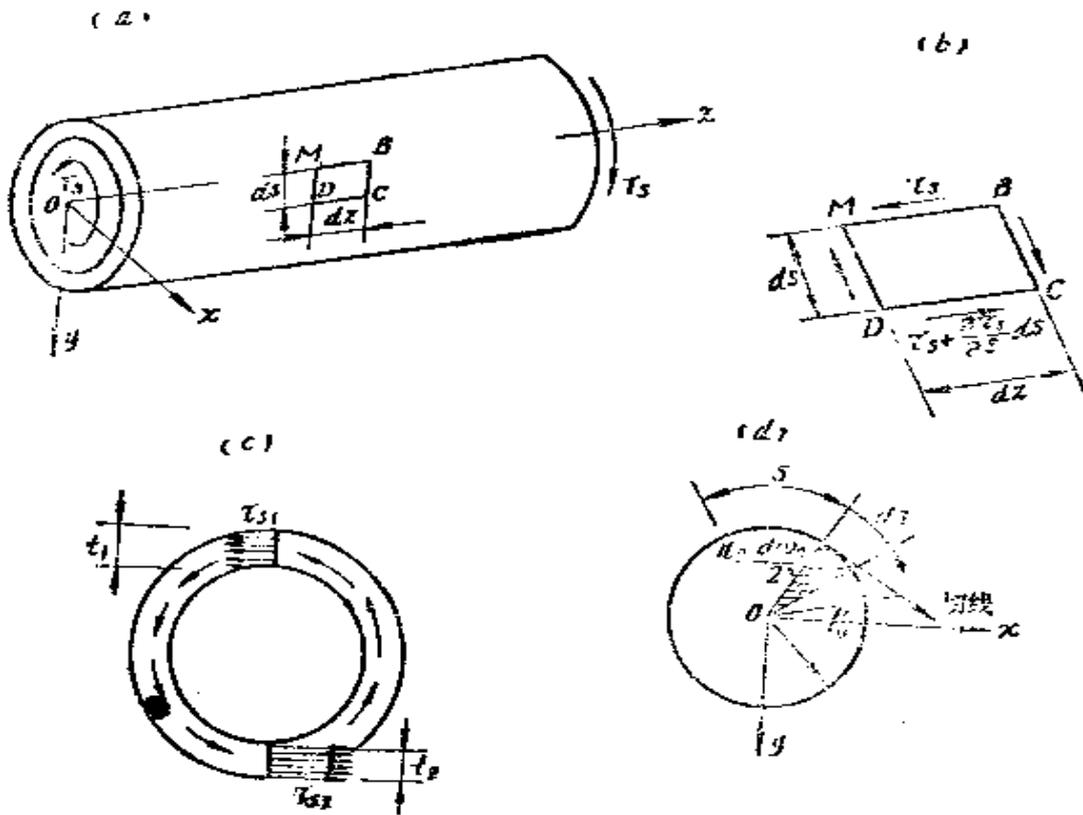


图 2—13 单室闭口截面受纯扭转时的剪应力

自图 2—13 (a) 截取  $ds \times dz$  的微单元体，示于图 2—13 (b)。由其平衡条件  $\Sigma F_x = 0$  得

$$\tau_s \cdot t \cdot dz - \left( \tau_s + \frac{\partial \tau_s}{\partial s} ds \right) \cdot t \cdot dz = 0$$

$$\text{即} \quad t \cdot \frac{\partial \tau_s}{\partial s} = \frac{\partial \cdot t \tau_s}{\partial s} = \frac{\partial q}{\partial s} = 0$$

说明  $q$  为常数，故截面周边各点的剪力流都相等，如图 2—13 (c) 所示。杆件壁厚  $t$  沿周边可能变化，因此  $q$  虽为常数，但剪应力  $\tau_s$  沿周边则可能是变化的，如图 2—13 (c) 所示。

横截面周线的所有剪力流  $q$  对剪切中心（扭转中心）的扭矩总和应等于外扭矩见图 (2—13 d)。即

$$T_s = \oint q \cdot \rho_0 \cdot ds = 2 q F \quad (2-3-8a)$$

$$\text{或} \quad q = \frac{T_s}{2 F} \quad (2-3-8b)$$

式中  $F$  为闭口截面壁厚中心线所围的面积。

由公式 (2—3—8) 还可以计算闭口截面任一点的剪应力为

$$\tau_s = \frac{T_s}{2 F t} \quad (2-3-9)$$

为确定闭口截面的纯扭转常数  $K$ ，考虑纯扭转引起杆中单位长度的变形能应等于外扭矩所作的功：

$$U = \frac{1}{2} \int_V \tau \gamma dv = \frac{1}{2 G} \oint \tau^2 t ds = \frac{q^2}{2 G} \oint \frac{ds}{t} = \frac{T_s^2}{8 G F^2} \oint \frac{ds}{t} \quad (2-3-10)$$

应等于外扭矩所作的功：

$$W = \frac{1}{2} T_s \phi' \quad (2-3-11)$$

故由式 (2—3—10) 与 (2—3—11) 得

$$T_s = \frac{4 F^2}{\oint \frac{ds}{t}} G \phi' \quad (2-3-12)$$

这式若与纯扭转公式  $T_s = GK \phi'$  比较可以得到

$$K = \frac{4 F^2}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (2-3-13)$$

将表达式 (2-3-9) 代入上式得  $K$  的另一表达式

$$K = \frac{2 F T_s}{\oint \tau ds} \quad (2-3-14)$$

(二) 多室箱形截面

如图 2-14 所示, 各室的剪力流为  $q_i$ , 两相邻室壁中的剪力流应等于相邻室剪力流之差, 即

$$q_{ik} = q_i - q_k \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = \text{与 } i \text{ 室相邻的室}) \quad (2-3-15)$$

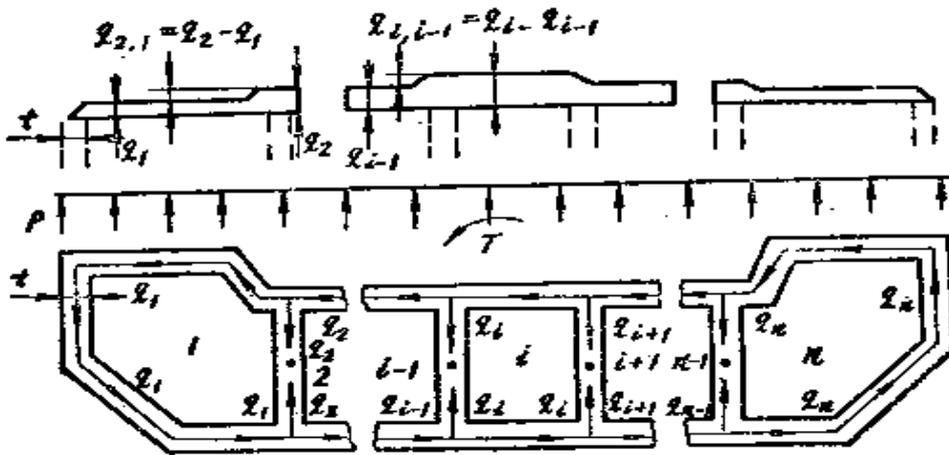


图 2-14 多室箱形截面受纯扭转时的剪应力

公式 (2-3-14) 对于每个室可写成如下形式:

$$\oint \tau ds = \frac{2T_s}{K} F_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2-3-16)$$

式中  $T_s$  表示作用在截面上的扭矩,  $F_i$  表示  $i$  室周边所围面积,  $\oint \tau ds$  表示  $i$  剪应力沿其闭合周边的积分。将  $\tau = q/t$  代入式 (2-3-16) 得,

$$\oint \frac{q}{t} ds = \frac{2T_s}{K} F_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

考虑到在  $i$  室与  $k$  室相邻室壁中剪力流

$$q_{ik} = q_i - q_k$$

并考虑在同一室中剪力流是常数, 故上式变为

$$q_i \phi' \frac{ds}{t} - 4 \sum q_k \int_{i,k} \frac{ds}{t} = \frac{2T_i}{K} F_i \quad (2-3-17)$$

式中  $i = 1, 2, \dots, n$ , 而  $k$  为与  $i$  室相邻的室。由上式所列  $n$  个线性方程组, 可解出各室的剪力流。

我们可先令 (2-3-17) 式中  $T_i/K = 1$  (即  $G\phi' = 1$ ) 解出剪力流记为  $\bar{q}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 则实际剪力流为

$$q_i = \bar{q}_i \cdot \frac{T_i}{K} = G\phi' \bar{q}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2-3-18)$$

由 (2-3-8) 式, 可知

$$T_i = 2 \sum_{i=1}^n q_i F_i$$

将 (2-3-18) 式代入上式, 得扭转常数为

$$K = 2 \sum_{i=1}^n \bar{q}_i F_i \quad (2-3-19)$$

### 三、单室箱形截面的翘曲扭转

#### (一) 翘曲函数

薄壁单元体剪应变  $\gamma$  与切向位移  $V$  和翘曲位移  $W$  的关系由公式 (2-2-5) 给出

$$\gamma = \frac{\partial W}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial z} \quad (2-2-5)$$

在只扭不弯时由公式 (2-2-8) 可得切向位移  $v = \rho_0 \phi$ 。将  $v$  对  $z$  求一阶导数后代入公式 (2-2-5), 就得到闭口截面纯扭转时截面中心线上的剪应变为

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{\partial W}{\partial s} + \rho_0 \phi'$$

由上式得到翘曲位移沿截面周边的变化为

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\tau}{G} - \rho_0 \phi' \quad (2-3-20)$$

将上式左右两边乘以  $ds$  并从坐标  $s$  的原点 ( $s = 0$ ) 到截面上任一点积分, 得到

$$W - \bar{W}_0 = \frac{1}{G} \int_0^s ds - \phi' \int_0^s \rho_0 ds \quad (2-3-21)$$

式中  $\bar{W}_0$  表示  $s = 0$  点处的翘曲位移 (纵向位移), 而  $W - \bar{W}_0$  则表示截面上任意点相对于该点的翘曲位移。闭口薄壁截面的剪应力  $\tau = q/t$ , 于是

$$W - \bar{W}_0 = \frac{q}{G} \int_0^s \tau \frac{ds}{t} - \phi' \int_0^s \rho_0 ds \quad (2-3-22)$$

由于纯扭转时  $T = t \tau K \phi'$ ,  $q = T/2F$ , 所以  $q/G = K \phi' / 2F$ 。将这些关系式代入式 (2-3-20), 得到

$$W = -\phi' \left( \int_0^s \rho_0 ds - \frac{2F}{\oint \frac{ds}{t}} \int_0^s \frac{ds}{t} \right) + \bar{W}_0 \quad (2-3-23)$$

$$\text{令} \quad \psi = \frac{2F}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (2-3-24)$$

表示闭口截面扭转函数, 则式 (2-3-23) 变为

$$W = -\phi' \left( \int_0^s \rho_0 ds - \psi \int_0^s \frac{ds}{t} \right) + \bar{W}_0 \quad (2-3-25a)$$

或

$$W = -\phi' \int_0^s \left( \rho_0 - \frac{\psi}{t} \right) ds + \bar{W}_0 \quad (2-3-25b)$$

同开口截面翘曲函数的表达式相似。单位翘曲可定义

$$\hat{\omega}_0 = \int_0^s \rho_0 ds - \psi \int_0^s \frac{ds}{t} \quad (2-3-26a)$$

或

$$\hat{\omega}_0 = \int_0^s \left( \rho_0 - \frac{\psi}{t} \right) ds \quad (2-3-26b)$$

式中  $\hat{\omega}_0$  的符号  $\wedge$  表示闭口截面, 右边第二项为考虑截面中心线上

由布勒特剪力流  $q = T/2F$  产生的剪应变  $\gamma = T/(2FGt)$  影响的修正项。 $\hat{\omega}_0$  即是闭口截面对于剪切中心的扇性坐标。

将式 (2-3-26) 代入式 (2-3-25) 得到纯扭转下的翘曲函数表达式:

$$W = -\phi' \hat{\omega}_0 + \bar{W}_0 \quad (2-3-27)$$

在纯扭转下单位长度扭转角  $\phi'$  为常数, 积分常数  $\bar{W}_0$  不随杆轴  $z$  而变,  $\bar{W}_0$  仅为  $s$  的函数而与  $z$  无关。

在考虑闭口截面翘曲扭转时, 其单位翘曲仍引用纯扭转下的单位翘曲  $\hat{\omega}_0$  (因闭口截面有较大的扭转刚度, 其扭转特性主要表现为纯扭转形式)。但考虑翘曲的影响引入新函数  $f$  (称为翘曲位移函数) 来代替  $\phi'$ , 因而翘曲函数为

$$W = -f \hat{\omega}_0 + \bar{W}_0(z) \quad (2-3-28)$$

## (二) 翘曲应力

$$e_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -f' \hat{\omega}_0 + \bar{W}'_0(z)$$

利用应力于应变之间的关系, 得

$$\sigma_z = E' e_z = E' [-f' \hat{\omega}_0 + \bar{W}'_0(z)] \quad (2-3-29)$$

这里

$$E' = \frac{E}{1 - \mu^2}$$

利用平衡条件

$$N = \int_A \sigma_z dA = 0$$

得到

$$\bar{W}'_0(z) \oint dA - f' \oint \hat{\omega}_0 dA = 0$$

由此解出

$$\bar{W}'_0(z) = \left( \frac{1}{A} \oint \hat{\omega}_0 t ds \right) f' \quad (2-3-30)$$

将上式代入式 (2-3-29), 得

$$\sigma_z = -E' \left( \hat{\omega}_0 - \frac{1}{A} \oint \hat{\omega}_0 t ds \right) f'$$

◆

$$\hat{\omega}_n = \hat{\omega}_0 - \frac{1}{A} \oint \hat{\omega}_0 t ds \quad (2-3-31)$$

表示闭口截面主扇性座标。翘曲正应力可写为

$$\sigma_n = -E' f' \hat{\omega}_n \quad (2-3-32)$$

由于上面求得的翘曲正应力在杆件中截面的分布不相等，因此，为了平衡它就在杆件的纵断面与横断面中产生有剪应力，这种剪应力称为翘曲剪应力。

当把闭口截面虚构一切口，把它变成开口截面后，由外荷载作用而产生的翘曲剪应力可按开口截面公式求出：

$$q = \tau_n t = E' S_n^0 \phi''$$

式中  $S_n^0$  为截面上任一点按主扇性坐标  $\omega_n$  计算的扇性静矩。考虑到翘曲扭转时的扭矩

$$T_n = -E' I_n \phi'' \quad (2-2-33)$$

翘曲剪力流也可表示为

$$q = \tau_n t = -\frac{T_n}{I_n} S_n^0 \quad (2-2-34)$$

为了闭合切口，使闭口截面在切口处恢复连续，我们需要在切口处作用一附加未知剪力流。因此闭口截面的实际剪力流为

$$(\tau_n t) = -\frac{T_n}{I_n} S_n^0 + \bar{q} \quad (2-3-35)$$

这未知剪力流  $\bar{q}$  可以根据切口处两对应面相对翘曲位移等于零的连续条件

$$\int_0^l \gamma_n ds = 0$$

求出。由于式中应变

$$\gamma_n = \frac{\tau_n}{G}$$

故切口处变形的连续条件又可表示为

$$\oint \frac{\tau_n}{G} ds = 0 \quad (2-3-36)$$

将式 (2-3-33) 代入式 (2-3-34) 解出未知剪力流为

$$\bar{q} = \frac{T_{\omega_n}}{I_{\omega_n}} \frac{\oint S_{\omega_n}^0 \frac{ds}{t}}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (2-3-37)$$

将这式代入式(2-3-33)后得出闭口截面实际剪力流为

$$(\tau_{\omega} t) = -\frac{T_{\omega_n}}{I_{\omega_n}} \left( S_{\omega_n}^0 - \frac{\oint S_{\omega_n}^0 \frac{ds}{t}}{\oint \frac{ds}{t}} \right) \quad (2-3-38)$$

令

$$S_{\omega_n}^{\wedge} = S_{\omega_n}^0 - \frac{\oint S_{\omega_n}^0 \frac{ds}{t}}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (2-3-39)$$

得翘曲剪力流为

$$(\tau_{\omega} t) = -\frac{T_{\omega_n}}{I_{\omega_n}} S_{\omega_n}^{\wedge} \quad (2-3-40)$$

这里的  $S_{\omega_n}^{\wedge}$  称为闭口截面的扇性静矩。

#### 第四节 箱形截面的扭转微分方程

由(2-3-20)式, 箱形截面的剪应力  $\tau$  与翘曲函数  $W$  和扭转角  $\phi$  的关系是

$$\tau = G \left( \frac{\partial W}{\partial s} + \rho_0 \phi' \right) \quad (2-4-1)$$

将(2-3-28)式的翘曲函数  $W$  及(2-3-26)式的  $\hat{\omega}_0$  值代入上式有

$$\tau = -G f \cdot \left( \rho_0 - \frac{\psi}{t} \right) + G \phi' \rho_0 \quad (2-4-2)$$

因为, 截面的总扭矩  $T$  可定义为

$$T = \int_A \rho_0 \tau dA \quad (2-4-3)$$

把应力公式  $\tau$  代入上式, 则

$$\begin{aligned}
 T &= -\int_A G f \left( \rho_0 - \frac{\psi}{t} \right) \rho_0 dA + \int_A G \phi' \rho_0^2 dA \\
 &= -GI_p f + GI_p \phi' + \int_A G f \frac{\psi}{t} \rho_0 dA
 \end{aligned}
 \tag{2-4-4}$$

式中

$$I_p = \int_A \rho_0^2 dA \tag{2-4-5}$$

为相对于剪切中心的惯性矩，把(2-3-24)式的 $\psi$ 代入右边第三项的积分有

$$\begin{aligned}
 \int_A G f \frac{\psi}{t} \rho_0 dA &= G f \int_s \frac{2F}{\phi} \frac{ds}{t} \rho_0 ds = G f \frac{4F^2}{\phi} \frac{ds}{t} \\
 &= G f K
 \end{aligned}
 \tag{2-4-6}$$

于是，总扭矩表达式(2-4-4)可写成

$$T = GI_p \phi' - G f (I_p - K) \tag{2-4-7}$$

因为总扭矩 $T$ 等于纯扭矩 $T_s = GK\phi'$ 和翘曲扭矩 $T_w$ 之和，即 $T = T_s + T_w$ 。所以，翘曲扭矩

$$T_w = G(I_p - K)(\phi' - f) \tag{2-4-8}$$

翘曲双力矩 $B' = \int_A \sigma_z \hat{\omega}_z dA$ ，将式(2-3-32)代入

$$\begin{aligned}
 B' &= \int_A (-E' f' \hat{\omega}_z) \hat{\omega}_z dA = -E' f' \hat{I}_{w_z} \\
 &\tag{2-4-9}
 \end{aligned}$$

其中

$$\hat{I}_{w_z} = \int_A \hat{\omega}_z^2 dA \tag{2-4-10}$$

是箱形截面扇性惯性矩。

而翘曲扭矩 $T_w = B' = -E' f' \hat{I}_{w_z}$ ，所以，有

$$-E' f' \hat{I}_{w_z} = G(I_p - K)(\phi' - f) \tag{2-4-11}$$

该式即是箱形截面薄壁杆件的扭转微分方程。它含有两个未知函数 $f$ 和 $\phi'$ ，下面我们来消去未知函数 $f$ ，而求出只含 $\phi$ 的方程，同时推导出 $f$ 与 $\phi$ 的关系。

由于 $dT/dz = -m_t$ ，因此，将式(2-4-7)对 $z$ 微分一

次得到

$$f' = \frac{I_p}{I_p - K} \phi'' + \frac{m_1}{G(I_p - K)} \quad (2-4-12)$$

将 (2-4-11) 对  $z$  微分一次:

$$-E' I_{\omega}^* f'' = G(I_p - K)(\phi'' - f') \quad (2-4-13)$$

再将 (2-4-12) 式对  $z$  微分二次:

$$f'' = -\frac{I_p}{I_p - K} \phi'''' + \frac{m_1''}{G(I_p - K)} \quad (2-4-14)$$

把 (2-4-14) 和 (2-4-12) 两式代入 (2-4-13) 式得

$$\frac{I_p}{I_p - K} E' I_{\omega}^* \phi'''' - GK \phi'' = m_1 - \frac{E' I_{\omega}^*}{G(I_p - K)} m_1''$$

令,

$$\beta = \frac{I_p}{I_p - K} \quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{E' I_{\omega}^*}{G(I_p - K)} \quad (2-4-15)$$

则上式变为

$$\beta E' I_{\omega}^* \phi'''' - GK \phi'' = m_1 - \frac{1}{\lambda^2} m_1'' \quad (2-4-16)$$

因此, 我们得到了用一个未知数  $\phi$  表示的箱形截面薄壁杆件的扭矩微分方程。

如果我们略去方程右边第二项 (即含  $m_1''$  项), 并令

$$k^2 = \frac{\mu GK}{E I_{\omega}^*}, \quad \mu = \frac{1}{\beta} \quad (2-4-17)$$

这是用  $E$  代替了  $E'$ 。为方便起见, 以后都用  $E$ 。则 (2-4-16) 可写成

$$\phi'''' - k^2 \phi'' = \mu m_1 / E I_{\omega}^* \quad (2-4-18)$$

上式与开口薄壁杆件的扭转微分方程 (2-2-36) 式的形式完全相同。因此, 开口与闭口薄壁杆件的扭转微分方程具有相同形式的解。其实, 开口截面时,  $I_p = \int_A \rho_0^2 dA \rightarrow \infty$ , 则  $\mu = 1$ , 这时,

(2-4-18) 式与 (2-2-36) 式完全相同。也就是说，开口截面的扭转微分方程只是闭口截面扭转微分方程的一种特殊形式。

下面来求新函数  $f$  与函数  $\phi$  的关系。由式 (2-4-11) 式求得

$$f = \phi' + \frac{EI_{\omega}^*}{G(I_p - K)} f'' \quad (2-4-19)$$

将式 (2-4-12) 式对  $z$  微分一次，所得  $f''$  的表达式代入上式，于是得

$$f = \phi' + \frac{EI_{\omega}^* I_p}{G(I_p - K)^2} \phi'' + \frac{EI_{\omega}^*}{G^2(I_p - K)^2} m'_t \quad (2-4-20a)$$

略去含  $m'_t$  项，则

$$f = \phi' + \frac{\phi''}{\mu \lambda^2} \quad (2-4-20b)$$

上式即是新函数  $f$  与扭转角  $\phi$  的关系。再分别把 (2-4-12) 式代入 (2-4-9) 式和把 (2-4-20) 式代入 (2-4-7) 式，就可以求出用扭转角  $\phi$  单独表示的翘曲双力矩  $B$  和总扭矩  $T$  的函数如下：

$$B = -\beta EI_{\omega}^* \phi'' - m_t / \lambda^2 \quad (2-4-21)$$

$$T = GK \phi' - \beta EI_{\omega}^* \phi'' - m'_t / \lambda^2 \quad (2-4-22)$$

同样，把 (2-4-19) 式代入 (2-4-8) 式可得到翘曲扭矩为：

$$T_{\omega} = -\beta EI_{\omega}^* \phi'' - m'_t / \lambda^2 \quad (2-4-23)$$

因此纯扭矩  $T_0$  为

$$T_0 = T - T_{\omega} = GK \phi' \quad (2-4-24)$$

这与纯扭转中的公式是相同的。

### 第五节 扭转微分方程的初参数解

从前面的推导已经知道，只要令闭口截面的扭转微分方程中的 $\mu=1$ ，则与开口截面的扭转微分方程相同。因此，求出了闭口截面的扭转微分方程的解，也就得到了开口截面扭转微分方程的解。

由(2-4-18)式，闭口截面的扭转微分方程：

$$\phi'''' - k^2\phi'' = \frac{\mu m_1}{EI_{\omega_0}}$$

它的齐次解为：

$$\phi = C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{sh} kz + C_4 \operatorname{ch} kz \quad (2-5-1)$$

式中 $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ 、 $C_4$ 是四个待定系数，可用杆件坐标原点( $z=0$ )处的四个初参数 $\phi_0$ 、 $f_0$ 、 $T_0$ 和 $B_0$ 表示。

把 $\phi'$ 和 $\phi''$ 代入(2-4-20b)式，得：

$$f = C_2 + C_3 k \left(1 + \frac{k^2}{\mu \lambda^2}\right) \operatorname{ch} kz + C_4 k \left(1 + \frac{k^2}{\mu \lambda^2}\right) \operatorname{sh} kz$$

根据前面对 $\lambda^2$ 、 $k^2$ 和 $\mu$ 的定义，则

$$1 + \frac{k^2}{\mu \lambda^2} = 1 + \frac{K}{I_p - K} = \frac{I_p}{I_p - K} = \beta$$

所以，有

$$f = C_2 + C_3 \beta k \operatorname{ch} kz + C_4 \beta k \operatorname{sh} kz \quad (2-5-2)$$

同理，有

$$\begin{aligned} B &= -\beta EI_{\omega_0} \phi'' \\ &= -\beta EI_{\omega_0} (C_3 k^2 \operatorname{ch} kz + C_4 k^2 \operatorname{sh} kz) \\ &= -GK (C_3 \operatorname{ch} kz + C_4 \operatorname{sh} kz) \quad (2-5-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= GK \phi' - \beta EI_{\omega_0} \phi''' \\ &= GK (C_2 + C_3 k \operatorname{ch} kz + C_4 k \operatorname{sh} kz) \\ &\quad - \beta EI_{\omega_0} k^2 (C_3 k \operatorname{ch} kz + C_4 k \operatorname{sh} kz) \\ &= C^2 GK \quad (2-5-4) \end{aligned}$$

把 $z=0$ 分别代入(2-5-1)~(2-5-4)各式，得

$$\phi_0 = C_1 + C_4 \quad f_0 = C_2 + C_3 \beta k$$

$$B_0 = -C_4 GK \quad T_0 = C_2 GK \quad (2-5-5)$$

由此得：

$$C_1 = \phi_0 + B_0 / GK \quad C_2 = T_0 / GK$$

$$C_3 = \mu(f_0 - T_0 / GK) / K \quad C_4 = -B_0 / GK$$

将这些待定系数代入式(2-5-1)，得到用初参数表示的扭转微分方程的齐次解是：

$$\phi = \phi_0 + \frac{\mu}{k} f_0 \operatorname{sh} kz + \frac{B_0}{GK} (1 - \operatorname{ch} kz)$$

$$+ \frac{T_0}{GK} \left( z - \frac{\mu}{k} \operatorname{sh} kz \right) \quad (2-5-6)$$

对于方程(2-4-18)的特解，可以根据外荷载与齐次解(2-5-6)式中对应的力素项的相似关系得到。如图2-15所示杆件，除了在 $z=0$ 处的四个初参数外，还作用有集中扭矩 $M_z$ 和分布扭矩 $m_z$ 。集中扭矩 $M_z$ 的方向与初参数 $T_0$ 的方向相反，且作用在 $z=a$ 处。因此， $M_z$ 对扭转角 $\phi$ 的影响只要在 $z \geq a$ 部分增加一项

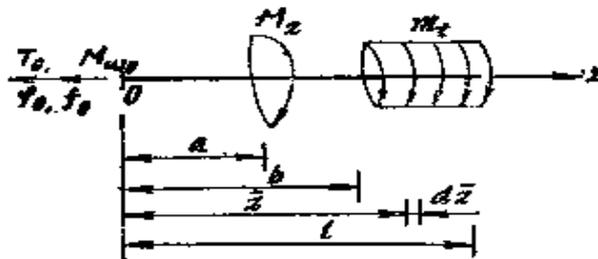


图 2-15 初参数与外扭矩荷载

$$-\frac{M_z}{GK} \left[ (z-a) - \frac{\mu}{k} \operatorname{sh} k(z-a) \right] \Big|_{z \geq a}$$

对于分布扭矩 $m_z$ ，可以看成是无数个集中扭矩之和，它使扭转角 $\phi$ 增加一项：

$$+\frac{m_z}{k^2 GK} \left\{ \frac{1}{2} k^2 (z-b)^2 - \mu [\operatorname{ch} k(z-b) - 1] \right\} \Big|_{z \geq b}$$

因此，把这两项加到(2-5-6)式的齐次解中去，就得到闭口薄壁杆件扭转微分方程的初参数解是

$$\begin{aligned}
\phi = & \phi_0 + \frac{\mu}{k} f_0 \operatorname{sh} k z + \frac{B_0}{G K} (1 - \operatorname{ch} k z) \\
& + \frac{T_0}{G K} \left( z - \frac{\mu}{k} \operatorname{sh} k z \right) - \frac{M_2}{G K} \left[ (z - a) - \frac{\mu}{k} \operatorname{sh} k \right. \\
& \quad \left. (z - a) \right] |_{z \rightarrow 0} \\
& - \frac{m_1}{k^2 G K} \left\{ \frac{1}{2} k^2 (z - b)^2 - \mu [\operatorname{ch} k (z - b) - 1] \right\} |_{z \rightarrow b}
\end{aligned}$$

(2-5-7)

相应地，有

$$\begin{aligned}
f = & \phi' + \frac{\phi''}{\mu \lambda^2} \\
= & \mu f_0 \operatorname{ch} k z - \frac{B_0}{G K} k \operatorname{sh} k z + \frac{T_0}{G K} (1 - \mu \operatorname{ch} k z) \\
& - \frac{M_2}{G K} [1 - \mu \operatorname{ch} k (z - a)] |_{z \rightarrow 0} - \frac{m_1}{k^2 G K} \\
& \quad [k^2 (z - b) - \mu k \operatorname{sh} k (z - b)] |_{z \rightarrow b} \\
& + \frac{\mu k^2}{\mu \lambda^2} f_0 \operatorname{ch} k z - \frac{k^3}{\mu \lambda^2} \frac{B_0}{G K} \operatorname{sh} k z - \frac{\mu k^2}{\mu \lambda^2} \frac{T_0}{G K} \\
& \quad \cdot \operatorname{ch} k z \\
& + \frac{k^2}{\mu \lambda^2} \frac{M_2}{G K} \operatorname{ch} k (z - a) |_{z \rightarrow 0} + \frac{\mu k}{\mu \lambda^2} \frac{m_1}{G K} \operatorname{sh} k \\
& \quad (z - b) |_{z \rightarrow b} \\
= & \left( 1 + \frac{k^2}{\mu \lambda^2} \right) \mu f_0 \operatorname{ch} k z - \left( 1 + \frac{k^2}{\mu \lambda^2} \right) \frac{B_0}{G K} k \operatorname{sh} k z \\
& + \frac{T_0}{G K} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{k^2}{\mu \lambda^2} \right) \mu \operatorname{ch} k z - \frac{M_2}{G K} \left[ 1 - \left( 1 + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{k^2}{\mu \lambda^2} \right) \mu \operatorname{ch} k (z - a) \right] |_{z \rightarrow 0} \\
& - \frac{m_1}{k^2 G K} \left[ k^2 (z - b) - \left( 1 + \frac{k^2}{\mu \lambda^2} \right) \mu \operatorname{sh} k (z - b) \right] \\
& \quad |_{z \rightarrow b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= f_0 \operatorname{ch} k z - \frac{k}{\mu} \frac{B_0}{GK} \operatorname{sh} k z + \frac{T_0}{GK} (1 - \operatorname{ch} k z) \\
 &- \frac{M_z}{GK} [1 - \operatorname{ch} k(z-a)]|_{z=a} \\
 &- \frac{m_1}{k GK} [k(z-b) - \operatorname{sh} k(z-b)]|_{z=b}
 \end{aligned}$$

(2-5-8)

$$\begin{aligned}
 B &= -\beta EI_a \phi'' - m_1 / \lambda^2 \\
 &= -\frac{\mu}{k} GK f_0 \operatorname{sh} k z + B_0 \operatorname{ch} k z + \frac{\mu}{k} T_0 \operatorname{sh} k z \\
 &- \frac{\mu}{k} M_z \operatorname{sh} k(z-a)|_{z=a} + \frac{\mu m_1}{k^2} [1 - \operatorname{ch} k(z-b)]|_{z=b}
 \end{aligned}$$

(2-5-9)

$$\begin{aligned}
 T &= GK \phi' - \beta EI_a \phi''' - m_1' / \lambda^2 \\
 &= T_0 - M_z |_{z=a} - m_1(z-b) |_{z=b}
 \end{aligned}$$

(2-5-10)

$$\begin{aligned}
 T_a &= B' \\
 &= -\mu GK f_0 \operatorname{ch} k z + B_0 k \operatorname{sh} k z + \mu T_0 \operatorname{ch} k z \\
 &- \mu M_z \operatorname{ch} k(z-a) |_{z=a} - \frac{\mu}{k} m_1 \operatorname{sh} k(z-b) |_{z=b}
 \end{aligned}$$

(2-5-11)

### 参 考 文 献

1. 胡春农, 黄剑源, 曹治杰: 《钢结构设计的若干理论》, 中国铁道出版社, 1984年, 北京。
2. 黄剑源: 《薄壁结构的扭转分析》(上), 中国铁道出版社, 1984年, 北京。
3. (美) C. P. 汉斯著, 常岭, 吴绍本译: 《结构杆件中的弯曲与扭转》, 人民交通出版社, 1981年, 北京
4. (捷) V. 克旦斯特克著, 何福照, 吴德心译: 《箱梁理论》, 人民交通出版社, 1988年, 北京
5. (日) 小西一朗编, 宋慕兰, 董其震译: 《钢桥》第二分册, 中国铁道出版社, 1980年, 北京。
6. 徐芝纶: 《弹性力学》(上), 人民教育出版社, 1980年, 北京。
7. 溪绍中, 郑世灏: 《应用弹性力学》, 中国铁道出版社, 1981年, 北京。
8. 黄剑源, 张罗溪: 考虑翘曲作用的曲线格子梁理论,《土木工程学报》, 1987年第3期。

## 第三章 直线连续箱形梁的 扭转分析

### 第一节 基本体系

图 3—5 (a) 所示为一端带有悬臂并受扭转荷载作用的薄壁连续梁，它在中间支承处的扭转角均为零。在扭转荷载作用下，该连续梁是超静定结构。实际上，在中间各支承处有两个多余未知力，一个是扭矩，另一个是翘曲双力矩。如果在中间各支承处切开，使该处能自由地发生翘曲，并以该处的多余未知力翘曲双力矩代之。这样，就使这种连续梁成为由一系列的单跨简支梁或悬臂梁组成的基本体系，即简支梁基本体系和悬臂梁基本体系。所谓简支梁是指两端可以自由翘曲，但扭转受约束。所谓悬臂梁也是指固端翘曲不受约束的悬臂梁。

#### 一、简支梁基本体系

在第二章第五节中求出了扭转微分方程的初参数解，只要把简支梁的边界条件代入，就可解出其中的四个初参数解。简支梁的边界条件是

$$\begin{aligned}\phi(z=0) &= \phi(z=l) = 0 \\ B(z=0) &= B(z=l) = 0\end{aligned}$$

取图 3—1 所示三种荷载条件，并分别求解。

(一) 均布扭矩  $m$  作用于简支梁 (图 3—1 a)

很显然，此时有  $T_0 = m \cdot l / 2$ 。由  $\phi(z=0)$ ，有  $\phi_0 = 0$ 。把  $B(z=l) = 0$  代入 (2—5—9)，解得

$$f_0 = \frac{kl \operatorname{sh} kl + 2(1 - \operatorname{ch} kl)}{2kGK \operatorname{sh} kl} m,$$

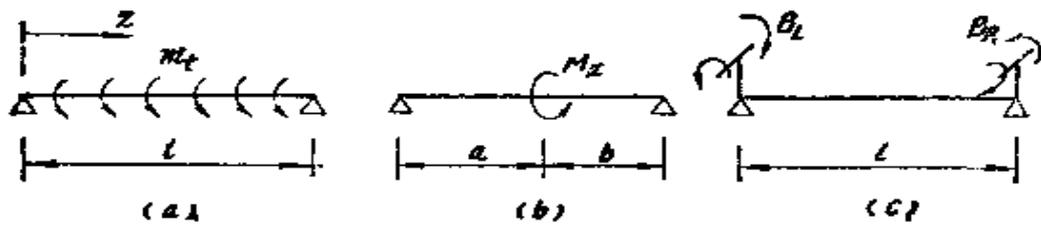


图 3-1 简支梁基本体系

因此，相应的各扭转变量是：

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{m_t \mu}{k} \frac{kl \operatorname{sh} kl + 2(1 - \operatorname{ch} kl)}{2kGK \operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} kz + \frac{m_t l}{2GK} \\ &\quad \times \left( z - \frac{\mu}{k} \operatorname{sh} kz \right) \\ &\quad - \frac{m_t}{k^2 GK} \left[ \frac{1}{2} k^2 z^2 - \mu (\operatorname{ch} kz - 1) \right] \\ &= \frac{\mu m_t}{k^2 GK} \left[ \frac{k^2}{2\mu} (l - z) z + \frac{1 - \operatorname{ch} kl}{\operatorname{sh} kl} \right. \\ &\quad \left. \operatorname{sh} kz + \operatorname{ch} kz - 1 \right] \\ &= \frac{\mu m_t}{k^2 GK} \left[ \frac{\operatorname{sh} kz + \operatorname{sh} k(l - z)}{\operatorname{sh} kl} + \frac{k^2}{2\mu} (l - z) z - 1 \right] \end{aligned} \quad (3-1-1)$$

$$\begin{aligned} f &= \frac{kl \operatorname{sh} kl + 2(1 - \operatorname{ch} kl)}{2kGK \operatorname{sh} kl} m_t \operatorname{ch} kz + \frac{m_t l}{2GK} \\ &\quad \times (1 - \operatorname{ch} kz) \\ &\quad - \frac{m_t}{kGK} (kz - \operatorname{sh} kz) \\ &= \frac{m_t}{kGK} \left[ \frac{\operatorname{ch} kz - \operatorname{ch} k(l - z)}{\operatorname{sh} kl} + k \left( \frac{l}{2} - z \right) \right] \end{aligned} \quad (3-1-2)$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu GK}{k} \frac{kl \operatorname{sh} kl + 2(1 - \operatorname{ch} kl)}{2kGK \operatorname{sh} kl} m_t \operatorname{sh} kz \\ &\quad + \frac{\mu}{k} \frac{m_t l}{2} \operatorname{sh} kz + \frac{\mu m_t}{k^2} (1 - \operatorname{ch} kz) \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu m_1}{k^2} \left[ 1 - \frac{\text{sh}kz + \text{sh}k(l-z)}{\text{sh}kl} \right] \quad (3-1-3)$$

$$T = m_1 \left( \frac{l}{2} - z \right) \quad (3-1-4)$$

(二) 集中扭矩  $m_2$  作用于简支梁 (图 3-1b)

此时有  $\phi_0 = 0, T_0 = M_2 b/l, B_0 = 0$ 。以及  $B(z=l) = 0$  代入 (2-5-9) 解得

$$f_0 = \frac{b \text{sh}kl - l \text{sh}kb}{IGK \text{sh}kl} M_2$$

把这四个初参数值代入相应的各扭转变量，有当  $0 \leq z \leq a$  时

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\mu}{k} \frac{b \text{sh}kl - l \text{sh}kb}{IGK \text{sh}kl} M_2 \text{sh}kz + \frac{b M_2}{IGK} \\ &\quad \times \left( z - \frac{\mu}{k} \text{sh}kz \right) \\ &= \frac{M_2}{GK} \left( \frac{b}{l} z - \frac{\mu \text{sh}kb}{k \text{sh}kl} \text{sh}kz \right) \quad (3-1-5) \end{aligned}$$

$$f = \frac{M_2}{GK} \left( \frac{b}{l} - \frac{\text{sh}kb}{\text{sh}kl} \text{ch}kz \right) \quad (3-1-6)$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu GK}{k} \frac{b \text{sh}kl - l \text{sh}kb}{IGK \text{sh}kl} M_2 \text{sh}kz \\ &\quad + \frac{\mu}{k} \frac{b}{l} M_2 \text{sh}kz \\ &= \frac{\mu}{k} M_2 \left( \frac{\text{sh}kb}{\text{sh}kl} \right) \text{sh}kz \quad (3-1-7) \end{aligned}$$

$$T = \frac{b}{l} M_2 \quad (3-1-8)$$

当  $a \leq z \leq l$  时

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{M_2}{GK} \left( \frac{b}{l} z - \frac{\mu \text{sh}kb}{k \text{sh}kl} \text{sh}kz \right) - \frac{M_2}{GK} \left[ (z-a) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu}{k} \text{sh}k(z-a) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{M_z}{kGK} \left[ ka \left( 1 - \frac{z}{l} \right) - \frac{\mu \operatorname{sh} kb}{\operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} kz + \mu \operatorname{sh} k(z-a) \right] \quad (3-1-9)$$

$$\begin{aligned} f &= \frac{M_z}{GK} \left( \frac{b}{l} - \frac{\operatorname{sh} kb}{\operatorname{sh} kl} \operatorname{ch} kz \right) - \frac{M_z}{GK} [1 - \operatorname{ch} k(z-a)] \\ &= -\frac{M_z}{GK} \left[ \frac{a}{l} + \frac{\operatorname{sh} kb}{\operatorname{sh} kl} \operatorname{ch} kz - \operatorname{ch} k(z-a) \right] \end{aligned} \quad (3-1-10)$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{M_z \mu \operatorname{sh} kb}{k \operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} kz - \frac{\mu M_z}{k} \operatorname{sh} k(z-a) \\ &= \frac{M_z \mu}{k} \left( \frac{\operatorname{sh} kb}{\operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} kz - \operatorname{sh} k(z-a) \right) \end{aligned} \quad (3-1-11)$$

$$T = -\frac{a}{l} M_z \quad (3-1-12)$$

(三) 翘曲双力矩作用于简支梁两端 (图3-1c)

此时有  $\phi_0 = 0, B_0 = B_l$ 。并将  $\phi(z=l) = 0$  代入 (2-5-7)

有

$$0 = \frac{\mu}{k} f_0 \operatorname{sh} kl + \frac{B_l}{GK} (1 - \operatorname{ch} kl) + \frac{T_0}{GK} \left( l - \frac{\mu}{k} \operatorname{sh} kl \right)$$

将  $B(z=l) = B_R$  代入 (2-5-9), 有

$$B_R = -\frac{\mu}{k} GK f_0 \operatorname{sh} kl + B_L \operatorname{ch} kl + \frac{\mu}{k} T_0 \operatorname{sh} kl$$

联立求解上两式, 得

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{B_R - B_L}{l} \\ f_0 &= \frac{B_L (kl \operatorname{ch} kl - \mu \operatorname{sh} kl) - B_R (kl - \mu \operatorname{sh} kl)}{\mu l GK \operatorname{sh} kl} \end{aligned}$$

所以, 相应的各扭转变量是

$$\phi = \frac{B_L}{GK} \left[ 1 - \frac{z}{l} - \frac{\operatorname{sh} k(l-z)}{\operatorname{sh} kl} \right] + \frac{B_R}{GK} \left( \frac{z}{l} - \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl} \right)$$

$$(3-1-13)$$

$$f = \frac{B_L}{IGK} \left[ \frac{kl \operatorname{ch} k(l-z)}{\mu \operatorname{sh} kl} - 1 \right] - \frac{B_R}{IGK} \left( \frac{kl \operatorname{ch} kz}{\mu \operatorname{sh} kl} - 1 \right) \quad (3-1-14)$$

$$B = B_L \frac{\operatorname{sh} k(l-z)}{\operatorname{sh} kl} + B_R \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl} \quad (3-1-15)$$

$$T = \frac{B_R - B_L}{l} \quad (3-1-16)$$

将以上公式用表格的形式列出，便于在应用中更直观地查找。见表（3—1）

## 二、悬臂梁基本体系

取如图 3—2 所示四种荷载条件，并分别求解。

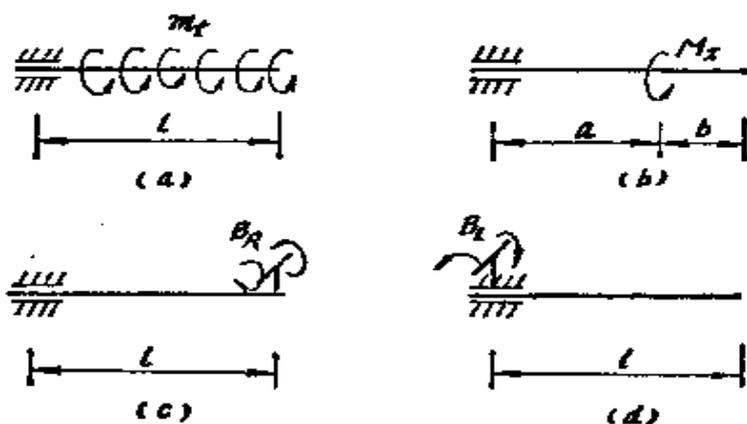


图 3—2 悬臂梁基本体系

(一) 均布扭矩  $m_t$  作用于悬臂梁 (图 3—2 a)

此时有  $\phi_0 = 0$ ,  $T_0 = m_t l$ ,  $B_0 = 0$  和  $B(z=l) = 0$ , 把这个条件代入 (2—5—9) 解得

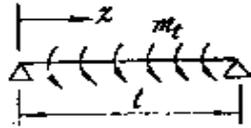
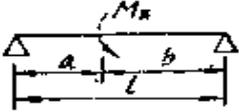
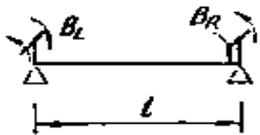
$$f_0 = \frac{m_t}{kGK} \left( kl + \frac{1 - \operatorname{ch} kl}{\operatorname{sh} kl} \right)$$

相应的各扭转变量为：

$$\phi = \frac{\mu}{k} \frac{m_t}{kGK} \left( kl + \frac{1 - \operatorname{ch} kl}{\operatorname{sh} kl} \right) \operatorname{sh} kz + \frac{m_t l}{GK}$$

简支梁基本体系中的变量表达式

表 8-1

<p>变 量</p>			
<p><math>f(z)</math></p>	$\frac{m_t}{kGK} \left( \frac{\text{ch}kz - \text{ch}k(l-z)}{\text{sh}kl} + k \left( \frac{l}{2} - z \right) \right)$	$\begin{aligned} z < a_1: & \frac{M_x}{GK} \left( \frac{b}{l} - \frac{\text{sh}kb}{\text{sh}kl} \text{ch}kz \right) \\ z > a_1: & -\frac{M_x}{GK} \left( \frac{a}{l} + \frac{\text{sh}kb}{\text{sh}kl} \text{ch}kz - \text{ch}kz - \text{ch}k(z-a) \right) \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \frac{B_L}{lGK} \left( \frac{k l \text{ch}k(l-z)}{\mu \text{sh}kl} - 1 \right) \\ & - \frac{B_R}{lGK} \left( \frac{k l \text{ch}kz}{\mu \text{sh}kl} - 1 \right) \end{aligned}$
<p><math>\phi(z)</math></p>	$\frac{\mu m_t}{k^2 GK} \left( \frac{\text{sh}kz + \text{sh}k(l-z)}{\text{sh}kl} - 1 + \frac{k^2}{2\mu} (l-z)z \right)$	$\begin{aligned} z < a_1: & \frac{M_x}{kGK} \left( \frac{kb}{l} - \frac{\mu \text{sh}kb}{\text{sh}kl} \text{sh}kz \right) \\ z > a_1: & \frac{M_x}{kGK} \left( ka \left( 1 - \frac{z}{l} \right) - \frac{\mu \text{sh}kb}{\text{sh}kl} \text{sh}kz + \mu \text{sh}k(z-a) \right) \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \frac{B_L}{GK} \left( 1 - \frac{z}{l} - \frac{\text{sh}k(l-z)}{\text{sh}kl} \right) \\ & + \frac{B_R}{GK} \left( \frac{z}{l} - \frac{\text{sh}kz}{\text{sh}kl} \right) \end{aligned}$
<p><math>B(z)</math></p>	$\frac{\mu m_t}{k^2} \left( 1 - \frac{\text{sh}kz + \text{sh}k(l-z)}{\text{sh}kl} \right)$	$\begin{aligned} z < a_1: & \frac{\mu M_x}{k} \frac{\text{sh}kb}{\text{sh}kl} \text{sh}kz \\ z > a_1: & \frac{\mu M_x}{k} \left( \frac{\text{sh}kb}{\text{sh}kl} \text{sh}kz - \text{sh}k(z-a) \right) \end{aligned}$	$\begin{aligned} & B_L \frac{\text{sh}k(l-z)}{\text{sh}kl} \\ & + B_R \frac{\text{sh}kz}{\text{sh}kl} \end{aligned}$
<p><math>T(z)</math></p>	$m_t \left( \frac{l}{2} - z \right)$	$\begin{aligned} z < a_1: & \frac{b}{l} M_x \\ z > a_1: & -\frac{a}{l} M_x \end{aligned}$	$\frac{B_R - B_L}{l}$

$$\begin{aligned} & \left( z - \frac{\mu}{k} \operatorname{sh} kz \right) \\ & - \frac{m_1}{k^2 G K} \left[ \frac{1}{2} k^2 z^2 - \mu (\operatorname{ch} kz - 1) \right] \\ & = \frac{\mu m_1}{k^2 G K} \left[ \frac{\operatorname{sh} kz + \operatorname{sh} k(l-z)}{\operatorname{sh} kl} + \frac{kz}{\mu} \right. \\ & \quad \left. \left( kl - \frac{kz}{2} \right) - 1 \right] \quad (3-1-17) \end{aligned}$$

$$f = \frac{m_1}{k G K} \left[ \frac{\operatorname{ch} kz - \operatorname{ch} k(l-z)}{\operatorname{sh} kl} + k(l-z) \right] \quad (3-1-18)$$

$$B = \frac{\mu m_1}{k^2} \left[ 1 - \frac{\operatorname{sh} kz + \operatorname{sh} k(l-z)}{\operatorname{sh} kl} \right] \quad (3-1-19)$$

$$T = m_1(l-z) \quad (3-1-20)$$

(二) 集中扭矩  $M_z$  作用于悬臂梁 (图3-2b)

此时的边界条件是  $\phi_0 = 0, T_0 = M_z, B_0 = 0$ , 并把  $B(z=l) = 0$  这个条件代入 (2-5-9) 解得

$$f_0 = \frac{M_z}{G K} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} kb}{\operatorname{sh} kl} \right)$$

所以, 当  $0 \leq z \leq a$  时

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\mu}{k} \frac{M_z}{G K} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} kb}{\operatorname{sh} kl} \right) \operatorname{sh} kz + \frac{M_z}{G K} \left( z - \frac{\mu}{k} \operatorname{sh} kz \right) \\ &= \frac{M_z}{k G K} \left( kz - \frac{\mu \operatorname{sh} kb}{\operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} kz \right) \quad (3-1-21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \frac{M_z}{G K} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} kb}{\operatorname{sh} kl} \right) \operatorname{ch} kz + \frac{M_z}{G K} (1 - \operatorname{ch} kz) \\ &= \frac{M_z}{G K} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} kb}{\operatorname{sh} kl} \operatorname{ch} kz \right) \quad (3-1-22) \end{aligned}$$

$$B = \frac{\mu G K}{k} \frac{M_z}{G K} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} kb}{\operatorname{sh} kl} \right) \operatorname{sh} kz + \frac{\mu M_z}{k} \operatorname{sh} kz$$

$$= \frac{\mu M_z}{k} \frac{\operatorname{sh} k b}{\operatorname{sh} k l} \operatorname{sh} k z \quad (3-1-23)$$

$$T = M_z \quad (3-1-24)$$

当  $a \leq z \leq l$  时

$$\phi = \frac{M_z}{k G K} \left[ k a - \frac{\mu \operatorname{sh} k a}{\operatorname{sh} k l} \operatorname{sh} k (l - z) \right] \quad (3-1-25)$$

$$f = \frac{M_z}{G K} \frac{\operatorname{sh} k a}{\operatorname{sh} k l} \operatorname{ch} k (l - z) \quad (3-1-26)$$

$$B = \frac{\mu M_z}{k} \frac{\operatorname{sh} k a}{\operatorname{sh} k l} \operatorname{sh} k (l - z) \quad (3-1-27)$$

$$T = 0 \quad (3-1-28)$$

(三) 在悬臂梁的自由端作用有双力矩  $B_R$  (图3-2c)

边界条件:  $\phi_0 = 0, T_0 = 0, B_0 = 0$ , 把  $B(z=l) = B_R$  代入 (2-5-9) 解得

$$f_0 = -\frac{k B_R}{\mu G K \operatorname{sh} k l}$$

故

$$\phi = -\frac{B_R \operatorname{sh} k z}{G K \operatorname{sh} k l} \quad (3-1-29)$$

$$f = -\frac{k B_R \operatorname{ch} k z}{\mu G K \operatorname{sh} k l} \quad (3-1-30)$$

$$B = \frac{B_R \operatorname{sh} k z}{\operatorname{sh} k l} \quad (3-1-31)$$

$$T = 0 \quad (3-1-32)$$

(四) 在悬臂梁的左端作用有双力矩  $B_L$  (图3-2c)

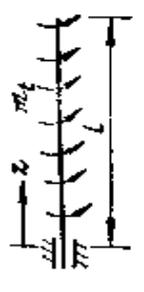
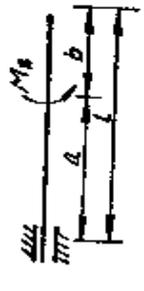
边界条件:  $\phi_0 = 0, T_0 = 0, B_0 = B_L$ , 把  $B(z=l) = 0$  代入 (2-5-9) 解得

$$f_0 = \frac{k \operatorname{ch} k l}{\mu G K \operatorname{sh} k l} B_L$$

故

表 8--2

悬臂梁基本体系中的变量公式

变 量				
$f(z)$	$\frac{m_i}{kGK} \left[ \frac{ch kz - ch k(l-z)}{sh kl} + h(l-z) \right]$	$\begin{matrix} z < a_1 \\ \frac{M_b}{kGK} \left( 1 - \frac{sh kb}{sh kl} - ch kz \right) \\ z > a_1 \\ \frac{M_b}{kGK} \frac{sh ka}{sh kl} - ch k(l-z) \end{matrix}$	$-\frac{k B_R ch kz}{\mu G K sh kl}$	$\frac{B_L k ch k(l-z)}{\mu G K sh kl}$
$\phi(z)$	$\frac{\mu m_i}{k^2 G K} \left[ \frac{sh kz + sh k(l-z)}{sh kl} + \frac{kz}{\mu} \left( kl - \frac{kz}{2} \right) - 1 \right]$	$\begin{matrix} z < a_1 \\ \frac{M_b}{kGK} \left( kz - \frac{\mu sh kb}{sh kl} - sh kz \right) \\ z > a_1 \\ \frac{M_b}{kGK} \left[ ka - \frac{\mu sh ka}{sh kl} - sh k(l-z) \right] \end{matrix}$	$-\frac{B_R sh kz}{G K sh kl}$	$\frac{B_L}{G K} \left[ 1 - \frac{sh k(l-z)}{sh kl} \right]$
$B(z)$	$\frac{\mu m_i}{k^2} \left[ 1 - \frac{sh kz + sh k(l-z)}{sh kl} \right]$	$\begin{matrix} z < a_1 \\ \frac{\mu M_b}{k} \frac{sh kb}{sh kl} - sh kz \\ z > a_1 \\ \frac{\mu M_b}{k} \frac{sh ka}{sh kl} - sh k(l-z) \end{matrix}$	$\frac{B_R sh kz}{sh kl}$	$B = \frac{B_L - B_R sh k(l-z)}{sh kl}$
$T(z)$	$m_i(l-z)$	$\begin{matrix} z < a_1, M_b \\ z > a_1, 0 \end{matrix}$	0	0

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{B_L \operatorname{ch} kl}{GK \operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} kz + \frac{B_L}{GK} (1 - \operatorname{ch} kz) \\ &= \frac{B_L}{GK} \left[ 1 - \frac{\operatorname{sh} k(l-z)}{\operatorname{sh} kl} \right] \end{aligned} \quad (3-1-33)$$

$$f = \frac{B_L k \operatorname{ch} k(l-z)}{\mu GK \operatorname{sh} kl} \quad (3-1-34)$$

$$B = \frac{B_L \cdot \operatorname{sh} k(l-z)}{\operatorname{sh} kl} \quad (3-1-35)$$

$$T = 0 \quad (3-1-36)$$

同简支梁基本体系一样，也把以上各变量公式列于一表，见表 3-2。

## 第二节 三翘曲双力矩方程

在连续箱形梁的翘曲扭转分析中，可将各支承处的翘曲双力矩作为多余力。现把图 3-3 a 中各支承处的翘曲约束放松，并分别代之以力双力矩，如图 3-3 b 所示，在放松翘曲约束的支承处，相对翘曲位移为零。因此，对第  $i$  个支承，我们可写出方程

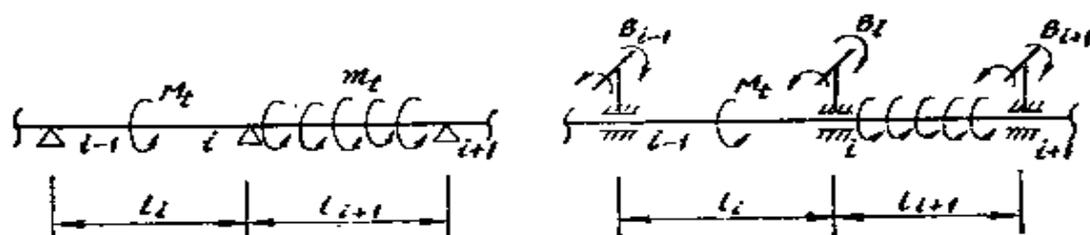


图 3-8  
(a) 连续梁原结构；(b) 基本体系。

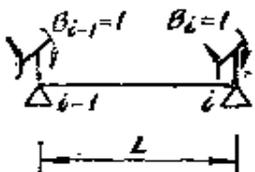
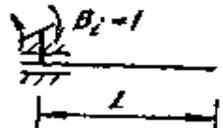
$$\mu_{i,i-1} B_{i-1} + \mu_{ii} B_i + \mu_{i,i+1} B_{i+1} + \mu_{i,p} = 0 \quad (3-2-1)$$

式中  $\mu_{ij}$  ( $j=i-1, i, i+1$ ) 代表单位双力矩作用于  $j$  端对  $i$  端产生的翘曲， $\mu_{i,p}$  代表外部扭矩作用对  $i$  端产生的翘曲。它们都应包括  $i$  端相邻两跨的影响。利用表 3-1 和表 3-2 中的  $f$  表达式，就能求出不同基本体系的  $\mu_{ij}$  和  $\mu_{i,p}$ ，分别列于表 3-3 和表 3-1

4。

单位冗力双力矩产生的翘曲变形系数

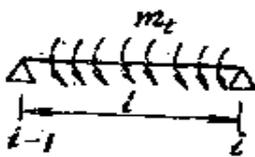
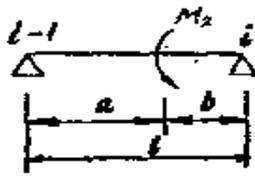
表 8—3

基本体系	表达式
	$\mu_{i-1, i-1} = \mu_{i, i} = \frac{1}{IGK} \left( \frac{kl}{\mu_{thkl}} - 1 \right)$ $\mu_{i-1, i} = \mu_{i, i-1} = \frac{1}{IGK} \left( 1 - \frac{kl}{\mu_{shkl}} \right)$
	$\mu_{i, i} = \frac{k}{\mu GK thkl}$

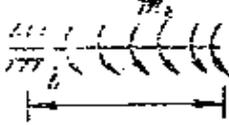
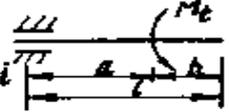
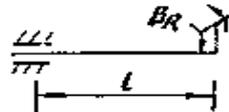
在方程 (3—2—1) 中, 最多只含有三个未知双力矩。因此, 我们把方程 (3—2—1) 叫做三双力矩方程。对于连续薄壁梁的每一个支承, 都可以写出这样一个方程式, 因而能够解出全部冗力双力矩。

外扭矩产生的翘曲变形系数

表 8—4

荷载状况	表达式
	$\mu_{i-1, i} = \mu_{i, i} = -\frac{m \cdot l}{GK} \left( \frac{1}{2} + \frac{1 - chkl}{k l shkl} \right)$
	$\mu_{i-1, i} = \frac{M_2}{GK} \left( \frac{b}{l} - \frac{shkb}{shkl} \right)$ $\mu_{i, i} = \frac{M_2}{KG} \left( \frac{a}{l} - \frac{shka}{shkl} \right)$

续上表

荷 载 状 况	表 达 式
	$\mu_{1,2} = \frac{m_l}{kGK} \left( kl - \frac{\operatorname{ch}kl - 1}{\operatorname{sh}kl} \right)$
	$\mu_{1,2} = \frac{M_0}{GK} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh}kb}{\operatorname{sh}kl} \right)$
	$\mu_{1,2} = \frac{kB_R}{\mu GK \operatorname{sh}kl}$

### 第三节 翘曲双力矩分配法

连续箱形梁在扭转荷载作用下各支承处的翘曲双力矩也可用类似于结构力学中的力矩分配法——双力矩分配法求解。此时基本体系的翘曲必须受到约束。边界条件：

简支梁： $\phi(z=0) = 0, \phi(z=l) = 0$

$$f(z=0) = 0, f(z=l) = 0$$

悬臂梁： $\phi(z=0) = 0, B(z=l) = 0$

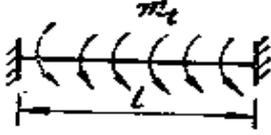
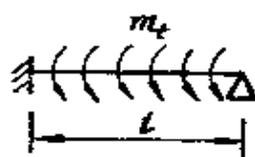
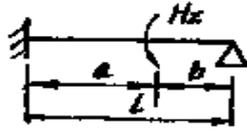
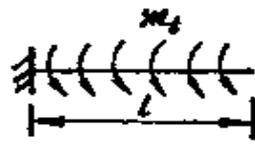
$$f(z=0) = 0, T(z=l) = 0$$

这里我们需要得到的是基本体系（翘曲受约束）在扭转荷载作用下的固端双力矩。只要在前面求得的翘曲扭转变量的初参数解中代入相应的边界条件并解出所有初参数，利用双力矩  $B$  的表达式就不难求得固端双力矩。其方法与本章第一节中的方法是一样的，这里不再赘述。两种基本体系在不同扭转荷载作用下的固端双力矩计算公式列于表 3—5。

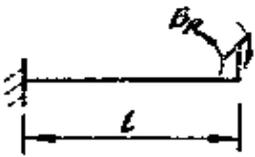
象力矩分配法一样，先对双力矩分配法的几个名词定义如下：

固端双力矩

表 3—5

基本体系	左端双力矩 $B_L$	右端 $B_R$
	$-\frac{\mu m_x}{k^2} \left[ \frac{kl(1 + \operatorname{ch} kl)}{2 \operatorname{sh} kl} - 1 \right]$	$-B_L$
	$-\frac{\mu M_x}{k} \left[ \frac{kl(1 - \operatorname{ch} kb) - kb(1 - \operatorname{ch} kl)}{kl \operatorname{sh} kl + 2\mu(1 - \operatorname{ch} kl)} + \frac{\mu(\operatorname{sh} kb + \operatorname{sh} ka - \operatorname{sh} kl)}{kl \operatorname{sh} kl + 2\mu(1 - \operatorname{ch} kl)} \right]$	$-B_L$ 但 互换 $a, b$
	$-\frac{\mu m_x}{2k^2} \frac{kl \operatorname{sh} kl - 2 \operatorname{ch} kl + 2}{kl \operatorname{ch} kl - \mu \operatorname{sh} kl}$	$0$
	$-\frac{\mu M_x}{k} \frac{kb \operatorname{sh} kl - kl \operatorname{sh} kb}{kl \operatorname{ch} kl - \mu \operatorname{sh} kl}$	$0$
	$-\frac{\mu m_x}{k^2} \frac{kl \operatorname{sh} kl - \operatorname{ch} kl + 1}{\operatorname{ch} kl}$	$0$
	$-\frac{\mu M_x}{k} \frac{\operatorname{sh} kl - \operatorname{sh} kb}{\operatorname{ch} kl}$	$0$

续上表

基本体系	左端双力矩 $B_L$	右端 $B_R$
	$\frac{B_R}{chkl}$	<p style="text-align: center;">•</p>

(a) 翘曲刚度  $X$ ：使固端产生单位翘曲（即  $f = 1$ ）时，该端所需要的双力矩；

(b) 传递双力矩：梁的近端产生单位翘曲时对远端产生的双力矩， $B_R = -XC$ ；

(c) 传递系数  $C$ ：梁的传递双力矩与翘曲刚度之比，即  $C = -B_R/X$ ；

(d) 分配系数  $\lambda$ ：相交于某一点的梁在该结点所分担的双力矩与该结点总的平衡双力矩之比，它与相交于该点的梁的相对翘曲刚度有关。图 3—4 中  $j$  点的分配系数是

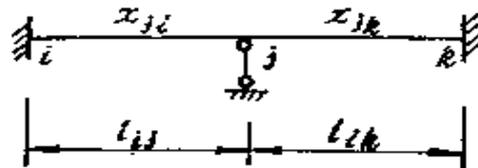


图 3—4  $j$  点的分配系数

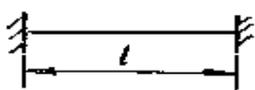
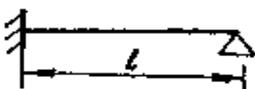
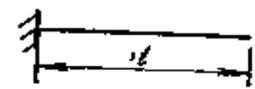
$$\lambda_{ji} = \frac{X_{ji}}{X_{ji} + X_{jk}}$$

$$\lambda_{jk} = \frac{X_{jk}}{X_{ji} + X_{jk}}$$

两种不同基本体系的翘曲刚度  $X$  和传递系数  $C$  列于表 3—6。双力矩分配的具体步骤和方法与力矩分配法完全相同，读者可参考一般的结构力学教科书。

翘曲刚度系数与传递系数

表 8—6

边界条件	翘曲刚度系数 $X$	传递系数 $C$
 $f(0) = 1, f(l) = 0$ $\varphi(0) = 0, \varphi(l) = 0$	$\frac{kl(klchkl - \mu shkl)}{klshkl + 2\mu(1 - chkl)} \frac{EI}{l}$	$\frac{\mu shkl - kl}{klchkl - \mu shkl}$
 $f(0) = 1, B(l) = 0$ $\varphi(0) = 0, \varphi(l) = 0$	$\frac{(kl)^2 chkl}{klchkl - \mu shkl} \frac{EI \zeta_0}{l}$	0
 $f(0) = 1, B(l) = 0$ $\varphi(0) = 0, T(l) = 0$	$\frac{klshkl}{chkl} \frac{EI \zeta_0}{l}$	0

#### 第四节 算 例

为了说明方法的应用，现对图 3—5 a 所示这样支承条件比较复杂的三跨连续薄壁梁进行分析。全梁为开口断面，故有  $\mu = 1.0$ 。各跨截面相同，其翘曲扭转参数  $k = 0.7427$ 。

##### 一、用三双力矩方程求解支承处的双力矩

根据方程 (3—2—1)，可写出该连续梁的冗力方程组为：

$$\left. \begin{aligned} \mu_{11} B_1 + \mu_{12} B_2 + \mu_{1p} &= 0 \\ \mu_{21} B_1 + \mu_{22} B_2 + \mu_{23} B_3 + \mu_{2p} &= 0 \\ \mu_{32} B_2 + \mu_{33} B_3 + \mu_{3p} &= 0 \end{aligned} \right\} (3-4-1)$$

查表 3—3 中第一栏的第一式，并代入有关数据，可算出

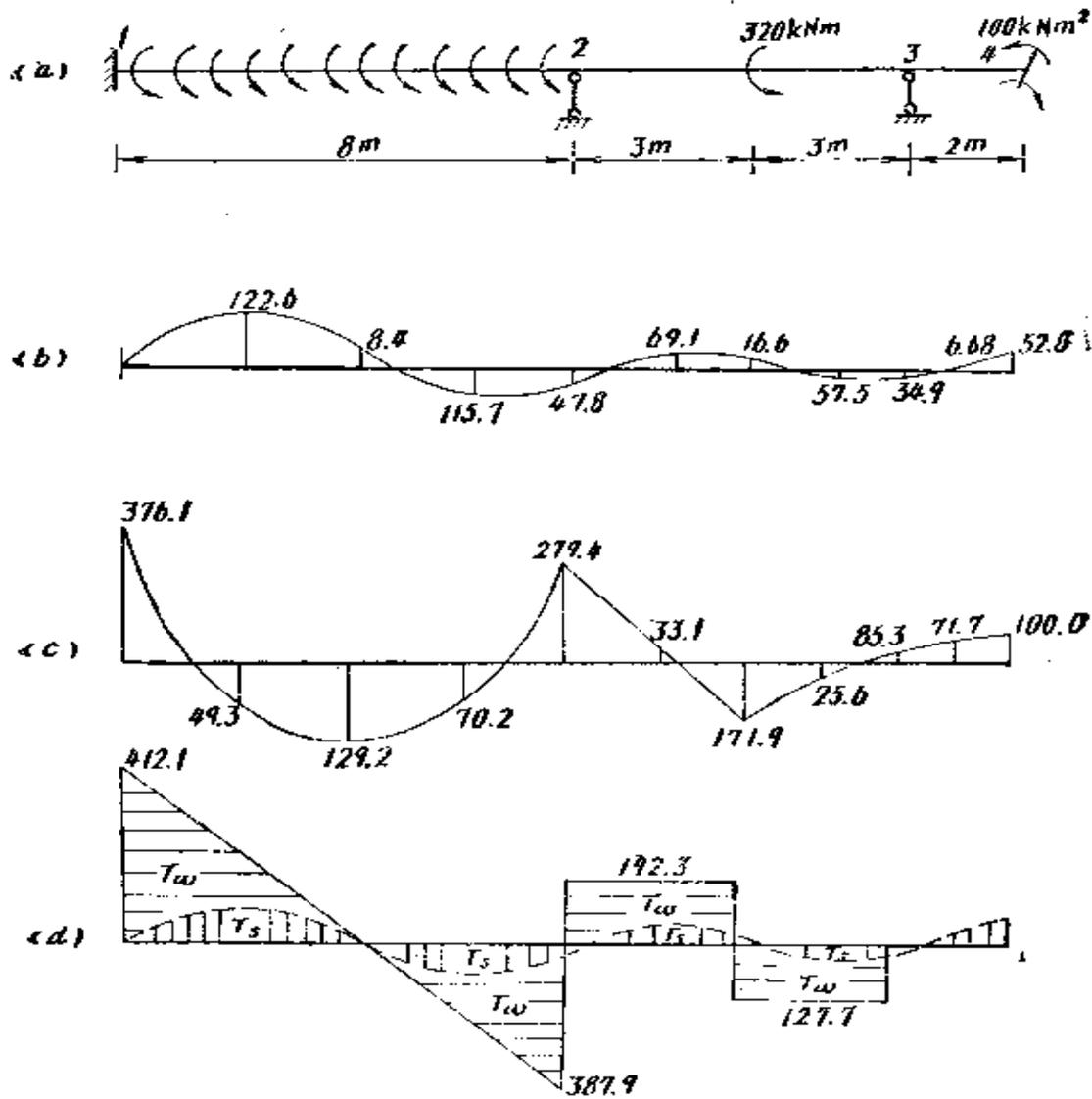


图 3-5

(a) 基本问题, (b) 纯扭矩  $T_s$  ( $\text{kN}\cdot\text{m}$ ), (c) 双力矩  $B$  ( $\text{kN}\cdot\text{m}^2$ ),  
 (d) 总扭矩  $T = T_s + T_o$

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= \frac{1}{IGK} \left( \frac{kl_1}{\text{th}kl_1} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{8GK} \left( \frac{5.94}{\text{th}5.94} - 1 \right) = \frac{0.6175}{GK} \end{aligned}$$

$$\mu_{22} = \frac{1}{l_1 GK} \left( \frac{kl_1}{\text{th}kl_1} - 1 \right) + \frac{1}{l_2 GK}$$

$$\left( \frac{kl_2}{\text{th}kl_2} - 1 \right) \\ = \frac{0.6175}{GK} + \frac{0.5769}{GK} = \frac{1.1944}{GK}$$

查表 3—4 中第一栏的第一式, 有

$$\mu_{1p} = \frac{m_1 l_1}{GK} \left( \frac{1}{2} + \frac{1 - \text{ch}kl_1}{kl_1 \text{sh}kl_1} \right) = \frac{266.027}{GK}$$

同样, 可算出 (3—4—1) 式中的其余各系数。最后把这些系数代入 (3—4—1) 式有

$$\left. \begin{aligned} 0.6175B_1 + 0.1211B_2 + 266.03 &= 0 \\ 0.1211B_1 + 1.1944B_2 + 0.1495B_3 + 392.011 &= 0 \\ 0.1495B_2 + 1.4016B_3 + 161.38 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-4-2)$$

解方程组 (3—4—2), 得支承处冗力双力矩是

$$B_1 = -376.1 \text{ kNm}^2, B_2 = -279.4 \text{ kNm}^2, \\ B_3 = -85.33 \text{ kNm}^2$$

## 二、用双力矩分配法求解支承处的双力矩

利用表 3—5 求得各固端双力矩是:  $B_1 = -360.18 \text{ kNm}^2$ ,  $B_2 \text{左} = 360.18 \text{ kNm}^2$ ,  $B_2 \text{右} = -173.45 \text{ kNm}^2$ ,  $B_3 \text{左} = 173.45 \text{ kNm}^2$ ,  $B_3 \text{右} = -42.90 \text{ kNm}^2$

查表 3—6 可求得有关的翘曲刚度  $X$  和传递系数  $C$ :  $X_{12} = 0.9285EI_0$ ,  $X_{21} = 1.0268EI_0$ ,  $X_{23} = 1.0268EI_0$ ,  $X_{34} = 0.673EI_0$ ;  $C_{12} = C_{21} = 0.1961$ ,  $C_{23} = C_{32} = 0.2591$ ,  $C_{34} = C_{43} = 0.0$

因此, 分配系数可算得如下:

$$\lambda_{21} = \frac{0.9285}{0.9285 + 1.0268} = 0.475$$

$$\lambda_{23} = \frac{1.0268}{0.9285 + 1.0268} = 0.525$$

$$\lambda_{32} = \frac{1.0268}{1.0268 + 0.673} = 0.604$$

$$\lambda_{34} = \frac{0.673}{1.0268 + 0.673} = 0.396$$

双力矩的分配见表 3—7

双 力 矩 分 配

表 3—7

支点编号	1		2		3		4	
传递系数 C	0.1961	0.1961	0.2591	0.2591	0.0		0.0	
分配系数 λ	1.0	0.475	0.525	0.604	0.396			
固端双力矩 B	-360.18	360.18	-173.45	173.45	-42.90		100.0	
分配与传递	-17.39 ← -88.70		-99.03 → -25.40					
			-16.45 ← -83.50				-41.63	
	1.53 ← 7.81		8.64 → 2.24					
			-0.35 ← -1.35				-0.89	
	0.17		0.1.8					
	-376.04	279.46	-279.46	85.44	-85.42		100.0	

各支承处的冗力双力矩求出以后，就可以把连续梁分为一系列的简支梁或悬臂梁（即基本体系）来计算。现以第一跨中各截面上的翘曲双力矩的计算来说明公式的应用。

把

表 3—1 中第一栏和第三栏与双力矩 B 对应的项叠加，则

$$B_{11} = B_1 \frac{\text{sh}k(l_1 - z)}{\text{sh}kl_1} + B_2 \frac{\text{sh}kz}{\text{sh}kl_1} + \frac{\mu m_1}{k^2} \left[ 1 - \frac{\text{sh}kz + \text{sh}k(l_1 - z)}{\text{sh}kl_1} \right]$$

用  $B_{11}$  表示第一跨中的双力矩。将前面已知的各数据代入上式并整理得

$$B_{11} = 181.29 - 2.934 \text{sh}0.7427(8 - z) - 2.425 \text{sh}0.7427z$$

上式很方便用列表的方法计算。式中  $z$  轴是以基本体系的左

支承点为原点的。我们把第一跨分成四等份，共五个计算点（包括支承点），列表计算如下：

$z$ (m)	0	2	4	6	8
$B_{11}$ (kN m <sup>2</sup> )	-376.1	49.3	129.2	70.2	-279.4

各跨中其它变量的计算都可按上面的方法进行。各变量的分布规律如图 3—5 所示。

### 参 考 文 献

1. J.M.Davies, Torsion-Bending Analysis Made Easy, Proc.Instn.Civ.Engrs, Part 2, 1985, 79, 737-747.
2. A.H.Khan and H.Tottenham, The Method of Bimoment Distribution for the Analysis of Continuous Thin-walled Structures Subject to torsion, Proc.Instn.Civ Engrs, part 2, 1977, 63, Dec. 843-863.
3. A.R.Taherian and H.R.Evans, The Bar Simulation Method for the Calculation of Shear Lag in Multi-Cell and Continuous Box Bridge Droc.Instn.Civ.Engrs, part 2, 1977, 63, Dec. 881-897.
4. C.P.Heins and R.S.Humphreys, Bending and Torsion Interaction of Box Girders, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 105, NO. ST5, May, 1979.
5. P.Waldron, Stiffness Analysis of Thin-Walled Girders, Journal of the Structural Division, ASCE, VOL. 112, NO. ST6, June, 1986.
6. 张罗溪: 连续箱形梁翘曲扭转分析, 石家庄铁道学院《教学与科技》, 1987年第三期。
7. 张罗溪, 姜振亚: 连续薄壁结构扭转分析的三双力矩方程, 《中国力学学会北方七省市力学学术会议论文汇编(2)》, 1988年6月, 太原。
8. 张罗溪: 连续薄壁结构扭转分析的两种实用计算方法《桥梁建设》, 1988年第三期。
9. 段立华, 秦顺全, 陈列: 梯形截面箱形梁的约束扭转计算, 《西南交通大学学报》, 1988年第四期。

## 第四章 平面曲线梁的计算理论

### 第一节 曲线梁的纯扭转理论

曲线梁不同于直线梁的主要特点之一是，即使不受扭矩荷载作用，在垂直荷载作用下，由于曲率的关系，同时产生弯矩和扭矩并彼此互为影响，即有弯扭耦合。下面按纯扭转理论分析曲线梁中应力与变形之间的关系。在纯扭转情形下，只要考虑梁的弯曲刚度 $EI_x$ 和纯扭转刚度 $GK$ ，而且假定剪心 $O$ 和形心 $C$ 是一致的。

#### 一、平衡微分方程

图4—1中绘出曲线梁上承受的荷载和某一截面上的内力和位移以及所取的坐标系。如果从中取一微段

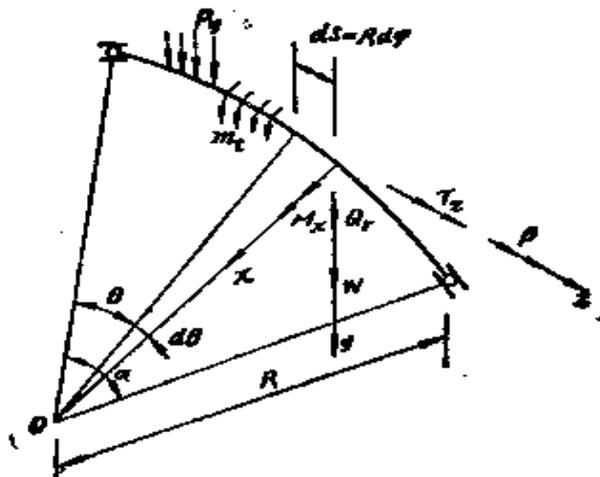


图4—1 曲线梁中的荷载内力与位移

$$ds = R d\theta \quad (4-1-1)$$

作为分离体，如图 4-2，则可根据平衡条件建立有关的平衡微分方程。

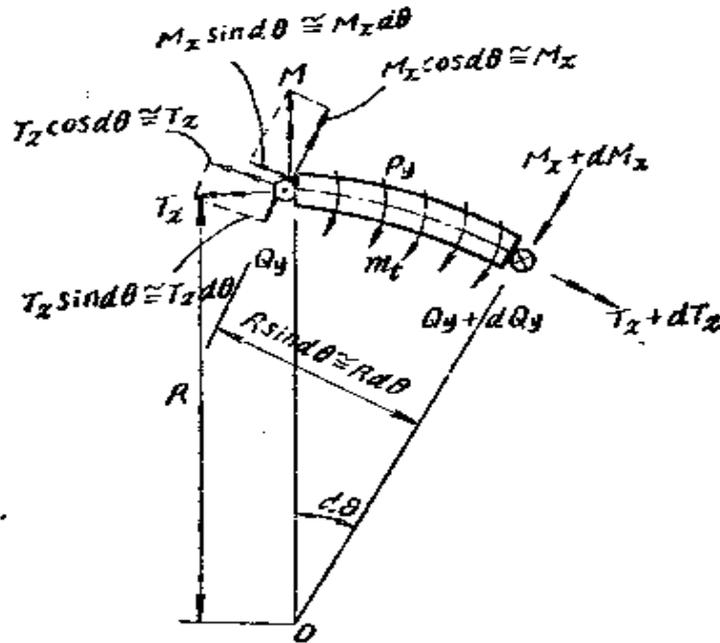


图 4-2 力的平衡

对  $y$  方向取力的平衡，即  $\sum V = 0$ ，有

$$Q_y + dQ_y - Q_y + P_z ds = 0$$

则

$$\frac{dQ_y}{ds} + P_z = 0 \quad (4-1-2a)$$

或

$$\frac{dQ_y}{d\theta} + P_z R = 0 \quad (4-1-2b)$$

对  $x$  轴取力矩平衡，即  $\sum M_x = 0$ ，有

$$M_x + dM_x - M_x - Q_y R d\theta + T_z d\theta + \frac{P_z (R d\theta)^2}{2} = 0$$

略去二阶微量，得

$$\frac{dM_x}{ds} + \frac{T_z}{R} - Q_y = 0 \quad (4-1-3a)$$

或

$$\frac{dM_x}{d\theta} + T_x - Q_x R = 0 \quad (4-1-3b)$$

类似地，对  $z$  轴取扭矩平衡，即  $\Sigma T_z = 0$ ，有

$$T_z + dT_z - T_z - M_x d\theta + m_x ds = 0$$

得

$$\frac{dT_z}{ds} - \frac{M_x}{R} + m_x = 0 \quad (4-1-4a)$$

或

$$\frac{dT_z}{d\theta} - M_x + m_x R = 0 \quad (4-1-4b)$$

对 (4-1-3a) 再微分一次，并将 (4-1-4a) 和 (4-1-2a) 两式代入，就得到弯矩  $M_x$  与荷载  $P_x$  和扭转  $m_x$  的关系是：

$$\frac{d^2 M_x}{ds^2} + \frac{M_x}{R^2} = -P_x + \frac{m_x}{R} \quad (4-1-5)$$

上式的通解可写成

$$M_x = A \sin \theta + B \cos \theta - P R^2 + m_x R \quad (4-1-6)$$

其中的两个待定系数可根据边界条件求得。求出弯矩  $M_x$  后根据 (4-1-4a) 式就能解出扭矩  $T_x$ ：

$$T_x = \int_0^s \left( \frac{M_x}{R} - m_x \right) ds + C \quad (4-1-7)$$

但是，上式中的积分常数  $C$  不能由平衡条件求得，必须考虑位移协调条件。

## 二、位移与内力的关系

图 4-3 示出了曲梁中挠曲角和扭转角的变化关系。在截面  $\theta$  处的挠曲角为  $dW/ds$ ，扭转角为  $\beta$ ，到截面  $\theta + d\theta$  处，它们都发生了改变，其值为

$$\text{挠曲角} = \frac{dW}{ds} - \beta d\theta + \frac{d^2 W}{ds^2} ds$$

$$\text{扭转角} = \beta + \frac{dW}{ds} d\theta$$

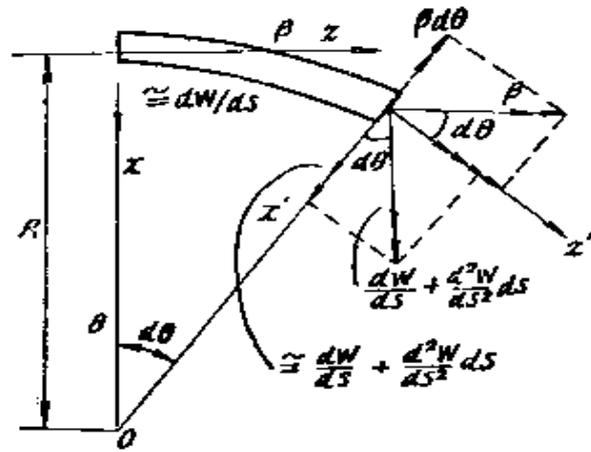


图 4—3 曲梁中挠曲角与扭转角的变化

从图 4—4 可知，曲梁中总的扭转角  $\phi$  还应包括梁的挠曲对它的影响，即总扭转角  $\phi$  包括两部分，一部分是曲梁本身绕  $z$  轴的扭角  $\beta$ ，另一部分是由于挠曲产生的扭角  $W/R$ 。因此

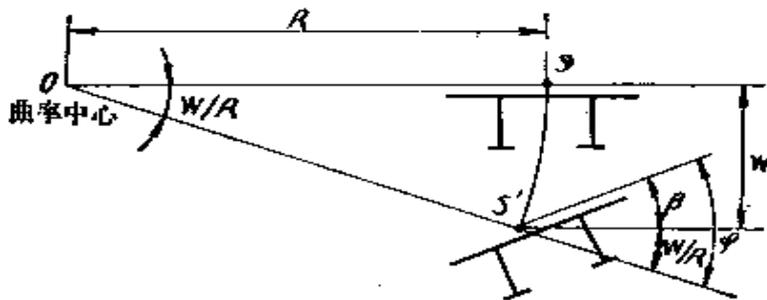


图 4—4 扭转角的概念

$$\phi = \beta + \frac{W}{R} \quad (4-1-8)$$

在纯扭转中，扭转角与扭矩的关系有

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{T_z}{GK} \text{ 或 } \phi = \int_0^s \frac{T_z}{GK} ds \quad (4-1-9)$$

又挠曲角的一阶导数是曲率，由曲率与弯矩的关系有

$$\frac{d^2W}{ds^2} - \frac{\beta}{R} = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (4-1-10)$$

把(4-1-8)式代入上式,得到曲梁中挠度 $W$ 的微分方程是

$$W'' + \frac{W}{R^2} = -\frac{M_x}{EI_x} + \frac{\phi}{R} \quad (4-1-11)$$

以上各式中的微分均是相对于曲线坐标 $S$ 。

## 第二节 曲线箱形梁的翘曲扭转理论

### 一、翘曲扭转微分方程

曲线梁由于弯扭耦合,在外荷载作用下梁内要产生较大的扭矩,这要求曲线梁具有较大的抗扭刚度。由于箱形截面的抗扭刚度大,因此,箱形截面是曲线桥梁中常采用的主要截面形式。如果考虑箱形截面的翘曲作用,在曲线梁的内力分析中应增加与之对应的内力…翘曲双力矩和翘曲扭矩。从第二章的分析我们知道翘曲双力矩是自相平衡力系,因此,它又不能象前一节曲线梁的纯扭转分析那样通过平衡条件获得,而必须通过翘曲扭转微分方程求解。

在第二章我们推导出直线箱形梁的翘曲扭转微分方程

$$\phi'''' - k^2 \phi'' = \mu m_t / EI_{\omega}$$

在前一节的纯扭转分析中,已知

$$\frac{dT_x}{ds} - \frac{M_x}{R} + m_t = 0$$

如果令

$$\bar{m}_t = -\frac{dT_x}{ds} = m_t - \frac{M_x}{R} \quad (4-2-1)$$

并把 $\bar{m}_t$ 代替(2-4-18)式中的 $m_t$ ,得

$$\phi'''' - k^2 \phi'' = \frac{\mu}{EI_{\omega}} \left( m_t - \frac{M_x}{R} \right) \quad (4-2-2)$$

上式便是曲线箱形梁的翘曲扭转微分方程,其微分是对曲线坐标 $S$ 而言。

## 二、翘曲扭转微分方程的初参数解

微分方程 (4-2-2) 的齐次解有如下形式:

$$\phi = C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{sh} k z + C_4 \operatorname{ch} k z \quad (2-5-1)$$

式中  $C_i (i=1, 2, 3, 4)$  为待定系数, 可以用  $z=0$  处的初参数  $\phi_0$ 、 $f_0$ 、 $T_0$ 、 $B_0$  表示

从第二章还知道翘曲双力矩  $B$ , 总扭矩  $T$  和扭转角  $\phi$  的关系是

$$B = -\beta E I_{\omega} \phi'' \quad (4-2-3)$$

$$T = GK \phi' - \beta E I_{\omega} \phi''' \quad (4-2-4)$$

以及箱形梁的翘曲位移函数与扭转角  $\phi$  的关系为:

$$f = \phi' + \frac{\phi'''}{\mu \lambda^2} \quad (4-2-5)$$

其中

$$\lambda^2 = \frac{G(I_p - K)}{E I_{\omega}} = \frac{I_p}{K} k^2$$

把对  $\phi$  的各阶导数和  $z=0$  分别代入有关各式, 则得到用初参数表示的翘曲扭转方程的齐次解是:

$$\begin{aligned} \phi = & \phi_0 + \frac{\mu f_0}{k} \operatorname{sh} k z + \frac{B_0}{GK} (1 - \operatorname{ch} k z) \\ & + \frac{T_0}{GK} \left( z - \frac{\mu}{k} \operatorname{sh} k z \right) \end{aligned} \quad (4-2-6)$$

方程 (4-2-2) 的通解应是齐次解加特解。其特解可以从齐次解 (4-2-6) 式中与之对应的关系得到。如图 4-5 所示, 除了在  $z=0$  处的 4 个初参数外, 梁上还作用有集中扭矩  $M_s$  和分布扭矩  $\bar{m}_s$  ( $\bar{m}_s = m_s - M_s/R$ )。这样方程 (4-2-2) 的通解是:

$$\begin{aligned} \phi = & \phi_0 + \frac{\mu}{k} f_0 \operatorname{sh} k z + \frac{B_0}{GK} (1 - \operatorname{ch} k z) \\ & + \frac{T_0}{GK} \left( z - \frac{\mu}{k} \operatorname{sh} k z \right) - \frac{M_s}{GK} [(z-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\mu}{k} \text{sh}k(z-a)] | z \geq a \\
 & -\frac{m_1}{k^2 GK} \left[ \frac{1}{2} (kz)^2 - \mu(\text{ch}kz - 1) \right] \\
 & + \frac{1}{R} \int_0^z M_z \frac{kz - \mu \text{sh}kz}{kGK} dz \quad (4-2-7)
 \end{aligned}$$

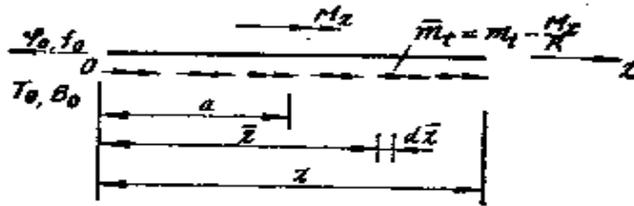


图 4-5 初参数与外荷载

式中只有当 \$z \geq a\$ 时才含有 \$M\_z\$ 项。

其它各变量有：

$$\begin{aligned}
 f &= \phi' + \frac{\phi''}{\mu \lambda^2} \\
 &= f_0 \text{ch}kz - \frac{k}{\mu} \frac{B_0}{GK} \text{sh}kz \\
 &+ \frac{T_0}{GK} (1 - \text{ch}kz) \\
 &- \frac{M_z}{GK} [1 - \text{ch}k(z-a)] | z < a \\
 &- \frac{m_1}{kGK} (kz - \text{sh}kz) \\
 &+ \frac{1}{R} \int_0^z M_z \frac{1 - \text{ch}kz}{GK} dz \quad (4-2-8) \\
 B &= -\beta EI_0 \phi'' - \frac{(m_1 - M_z/R)}{\lambda^2} \\
 &= -\frac{\mu}{k} GK f_0 \text{sh}kz + B_0 \text{ch}kz \\
 &+ \frac{\mu}{k} T_0 \text{sh}kz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\mu}{k} M_{,s} \operatorname{sh} k(z-a) |_{z \rightarrow a} \\
 & + \frac{\mu m_1}{k^2} (1 - \operatorname{ch} k z) \\
 & + \frac{1}{R} \int_0^z M_{,z} \frac{\mu \operatorname{sh} k \bar{z}}{k} d \bar{z} \quad (4-2-9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T &= GK \phi' - \beta EI \hat{\omega}_s \phi'' \\
 &= T_0 - M_{,z} |_{z \rightarrow a} - m_1 z + \frac{1}{R} \int_0^z M_{,z} d \bar{z} \quad (4-2-10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_0 &= B' \\
 &= -\mu GK f_0 \operatorname{ch} k z + B_0 k \operatorname{sh} k z + \mu T_0 \operatorname{ch} k z \\
 &\quad - \mu M_{,c} \operatorname{sh} k(z-a) |_{z \rightarrow a} - \frac{\mu}{k} m_1 \operatorname{sh} k z \\
 &\quad + \frac{\mu}{R} \int_0^z M_{,z} \operatorname{ch} k \bar{z} d \bar{z} \quad (4-2-11)
 \end{aligned}$$

若是开口断面，则只需令前面各式中的  $\mu=1$ 。当  $R \rightarrow \infty$  时，则前面的有关各式与第二章对应直线箱形梁的有关表达式是相同的。

为了便于读者更直观地了解曲线箱形梁翘曲扭转分析中各变量的关系，现将  $\phi$ ， $f$ ， $B$  和  $T$  的初参数表达式用表格的形式列出，见表 4-1。

### 第三节 曲线筒支梁的纯扭转分析

#### 一、用力法解一次超静定曲线筒支梁

曲线筒支梁的两端支座除了承受竖向反力外，还要承受扭矩。因此，图 4-6 所示体系虽说是一筒支梁，但还是一次超静定体系。

对曲线筒支梁的分析与计算，至关重要。它将被用来作为基本体系，以供对连续梁进行分析与计算。

要求出图 4-6 所示曲线筒支梁在外力作用下的内力，首先

表 4-1 曲线箱形超扭转微分方程初参数解一览表



	$\phi_0$	$f_0$	$B_0$	$T_0$	$M_0$	$m_0$ 从 0 到 $z$	曲率的贡献
$\phi$	$\frac{\mu \text{sh} k z}{k}$	$\frac{1 - \text{ch} k z}{GK}$	$\frac{kz - \mu \text{sh} k z}{kGK}$	$-\left[ \frac{k(z-a) - \mu \text{sh} k z(z-a)}{kGK} \right]$	$\frac{0.5(kz)^2 - \mu(\text{ch} k z - 1)}{k^2 GK}$	$\frac{1}{R} \int_0^z \frac{M_z}{kz - \mu \text{sh} k z} dz$	
$f$	$\text{ch} k z$	$-\frac{k \text{sh} k z}{\mu GK}$	$\frac{1 - \text{ch} k z}{GK}$	$-\left[ \frac{1 - \text{ch} k(z-a)}{GK} \right]$	$-\left[ \frac{kz - \text{sh} k z}{kGK} \right]$	$\frac{1}{R} \int_0^z \frac{M_z}{1 - \text{ch} k z} dz$	
$B$	$-\frac{\mu GK \text{sh} k z}{k}$	$\text{ch} k z$	$\frac{\mu \text{sh} k z}{k}$	$-\frac{\mu \text{sh} k(z-a)}{k}$	$\frac{\mu(1 - \text{ch} k z)}{k^2}$	$\frac{1}{R} \int_0^z \frac{M_z}{\mu \text{sh} k z} dz$	
$T$	-	-	1	-1	-z	$\frac{1}{R} \int_0^z M_z dz$	
$T_0$	$-\mu GK \text{ch} k z$	$k \text{sh} k z$	$\mu \text{ch} k z$	$-\mu \text{ch} k(z-a)$	$-\frac{\mu \text{sh} k z}{k}$	$\frac{\mu}{R} \int_0^z M_z \text{ch} k z dz$	

可用力法原理解出一个多余未知力，这里以右支座的扭矩  $T_B$  为多余未知力。用力法求解时，先将右支座处的扭转约束放松，并代之以多余未知力  $T_B$ ，如图 4—7。图 4—7 是静定体系，其内力可用平衡关系求得。

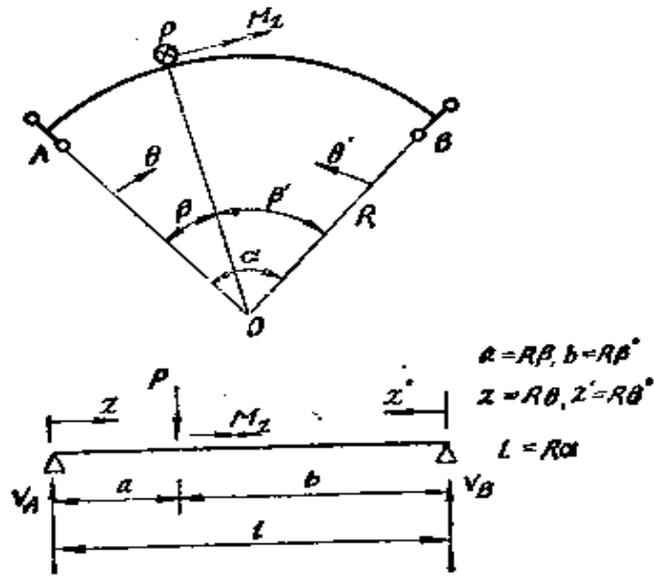


图 4—6 一次超静定体系

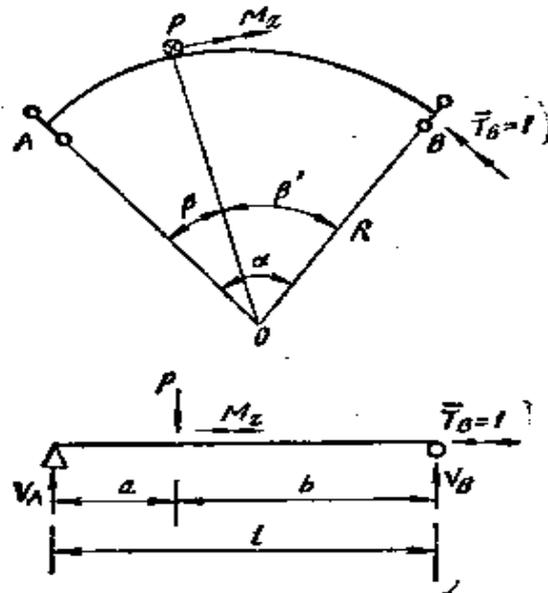


图 4—7 静定体系

对图 4—7 曲线简支梁静定体系  $A$  点的径向轴力矩平衡, 即  $\Sigma M_A = 0$ , 有

$$V_B R \sin \alpha - P R \sin \beta + M_z \sin \beta = 0$$

再由竖向力的平衡有

$$V_A + V_B - P = 0$$

由此解得静定体系的反力:

$$V_A = P - \left( P - \frac{M_z}{R} \right) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad (4-3-1a)$$

$$V_B = \left( P - \frac{M_z}{R} \right) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad (4-3-1b)$$

对  $A$  点的切向轴取扭矩平衡,  $\Sigma T_A = 0$ , 有

$$T_A - P R (1 - \cos \beta) - M_z \cos \beta + V_B R (1 - \cos \alpha) = 0$$

解得  $A$  点的反扭矩是

$$T_A = P R - (P R - M_z) \frac{\sin \beta + \sin \beta'}{\sin \alpha} \quad (4-3-2)$$

求出了支座反力后, 曲梁中任一截面处的内力可由平衡条件求得:

当  $0 \leq \theta < \beta$  时:

$$\text{弯矩: } M_x = V_A \cdot R \sin \theta - T_A \sin \theta$$

将式 (4-3-1a) 和式 (4-3-2) 代入后得

$$M_x = (P R - M_z) \cdot \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \cdot \sin \theta \quad (4-3-3a)$$

$$\text{扭矩: } T = T_A \cos \theta + V_A R (1 - \cos \theta)$$

将式 (4-3-1a) 和式 (4-3-2) 代入后得

$$T = P R - (P R - M_z) \frac{\sin \beta + \sin \beta' \cos \theta}{\sin \alpha} \quad (4-3-4a)$$

$$\text{剪力: } Q_y = P - \left( P - \frac{M_z}{R} \right) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad (4-3-5a)$$

当  $\beta \leq \theta \leq \alpha$  时:

$$\text{弯矩: } M_x = (P R - M_z) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \sin \theta' \quad (4-3-3b)$$

$$\text{扭矩: } T = -(PR - M_x) \frac{\sin \beta (1 - \cos \theta')}{\sin \alpha} \quad (4-3-4b)$$

$$\text{剪力: } Q_y = -\left(P - \frac{M_x}{R}\right) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad (4-3-5b)$$

如果在图 4-7 的支座 B 处加一单位扭矩  $\bar{T}_B = 1$ , 由此引起的支座反力是:

$$\bar{V}_A = -\frac{1}{R}, \quad \bar{V}_B = \frac{1}{R}, \quad \bar{T}_A = -1 \quad (4-3-6)$$

而任一截面的内力是

$$\bar{M}_x = 0, \quad \bar{T} = -1, \quad \bar{Q}_y = -\frac{1}{R} \quad (4-3-7)$$

根据力法原理, 在支座 B 处的扭转角  $\phi$  应满足位移协调条件:

$$T_B \bar{\phi}_B + \phi_{Bp} = 0 \quad (4-3-8)$$

$$\text{式中 } \bar{\phi}_B = \int_0^l \bar{T}^2 \frac{dz}{GK} = \frac{l}{GK}$$

是由于  $\bar{T}_B = 1$  作用在 B 点时引起 B 点的扭转角

$$\phi_{Bp} = \int_0^l \bar{T} T_p \frac{dz}{GK} = -\int_0^l T_p \frac{dz}{GK}$$

是由于静定体系在外荷载作用下引起 B 点的扭转角。把  $\bar{\phi}_B$  和  $\phi_{Bp}$  代入 (4-3-8), 对于等截面曲梁有

$$T_B = \frac{1}{l} \int_0^l T_p dz \quad (4-3-9)$$

上式表明, 冗力  $T_B$  的数值等于静定体系由于外荷载作用而产生的扭矩  $T_p$  沿整个曲梁长度的平均值。求出了 B 支座的冗力  $T_B$  后, 图 4-6 所示的简支梁就可用叠加法求解。

## 二、曲线简支梁中的截面内力

(一) 集中力  $P$  和集中扭矩  $M_x$  作用下情形 (图 4-6)。

把 (4-3-4) 式中的扭矩表达式代入 (4-3-9) 式可求得此时的冗力  $T_B$

$$\begin{aligned}
 T_B &= \frac{1}{l} \int_0^\beta [PR - (PR - M_s) \frac{\sin \beta + \sin \beta' \cos \theta}{\sin \alpha}] R d\theta \\
 &\rightarrow \frac{1}{l} \int_0^{\beta'} - (PR - M_s) \frac{\sin \beta (1 - \cos \theta')}{\sin \alpha} R d\theta \\
 &= PR \frac{\beta}{\alpha} - (PR - M_s) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad (4-3-10)
 \end{aligned}$$

所以，根据叠加原理，梁中任一截面处的内力可表示为：

$$\begin{aligned}
 M_s &= M_{s,p} + \bar{M}_s T_B \\
 T &= T_p + \bar{T} T_B \\
 Q_v &= Q_{v,p} + \bar{Q}_v T_B
 \end{aligned}$$

其中  $M_{s,p}$ 、 $T_p$  和  $Q_{v,p}$  分别是静定体系相应荷载作用下的内力，它们的表达式分别是 (4-3-3)，(4-3-4) 和 (4-3-5) 式。而  $\bar{M}_s$ 、 $\bar{T}$  和  $\bar{Q}_v$  则是静定体系在冗力  $T_B=1$  作用时产生的内力，如 (4-3-7) 式。由于 (4-3-7) 式中  $\bar{M}_s=0$ ，故静定体系与一次超静定体系各截面的弯矩  $M_s$  相同。

当  $0 \leq \theta < \beta$  时，

$$M_s = (PR - M_s) \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \sin \theta \quad (4-3-11a)$$

$$\begin{aligned}
 T &= PR - (PR - M_s) \frac{\sin \beta + \sin \beta' \cos \theta}{\sin \alpha} \\
 &\quad - PR \frac{\beta}{\alpha} + (PR - M_s) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \\
 &= PR \frac{\beta'}{\alpha} - (PR - M_s) \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \cos \theta \quad (4-3-12a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_v &= P - \left( P - \frac{M_s}{R} \right) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} - \frac{1}{R} \left[ PR \frac{\beta}{\alpha} \right. \\
 &\quad \left. - (PR - M_s) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right] \\
 &= P \frac{\beta'}{\alpha} \quad (4-3-13a)
 \end{aligned}$$

同理，当  $\beta \leq \theta \leq \alpha$  时：

$$M_x = (PR - M_s) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \sin \theta' \quad (4-3-11b)$$

$$T = -PR \frac{\beta}{\alpha} + (PR - M_s) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cos \theta' \quad (4-3-12b)$$

$$Q_x = -P \frac{\beta}{\alpha} \quad (4-3-13b)$$

(二) 均布力  $p$  和均布扭矩  $m_t$  作用下的情形 (图 4-8)

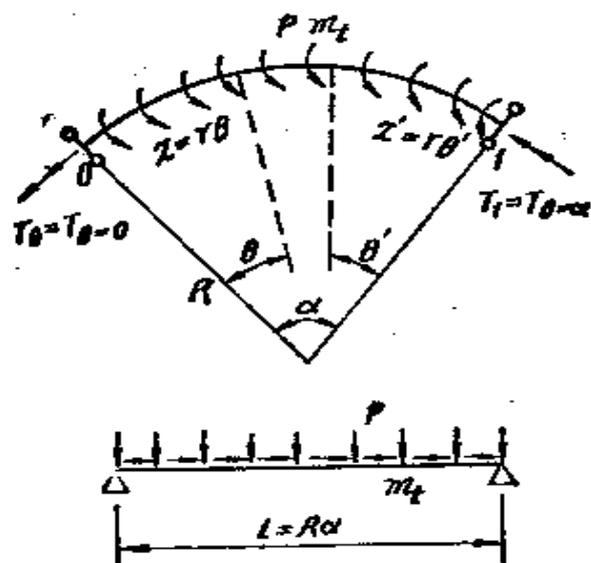


图 4-8 均布荷载  $P, m_t$  作用

求出了集中荷载作用下的内力后, 就可应用分段积分的方法求均布荷载作用下的相应表达式。但此时应以  $\theta$  和  $\theta'$  为常数, 而以  $\beta$  和  $\beta'$  为变数。

对于弯矩  $M_x$ , 由方程 (4-3-11) 得

$$M_x = \int_0^{\theta'} (pR - m_t) \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \sin \beta' d(R\beta') + \int_0^{\theta} (pR - m_t) \frac{\sin \theta'}{\sin \alpha} \sin \beta d(R\beta)$$

积分得到  $M_x$  的表达式为:

$$M_x = (pR^2 - m_t R) \left( \frac{\sin \theta + \sin \theta'}{\sin \alpha} - 1 \right)$$

(4-3-14)

对于扭矩  $T$ , 由方程 (4-3-12) 得

$$T = \int_0^{\theta'} \left[ pR \frac{\beta'}{\alpha} - (pR - m_t) \frac{\cos \theta}{\sin \alpha} \times \sin \beta' \right] d(R\beta')$$

$$+ \int_0^{\theta} \left[ pR \frac{\beta}{\alpha} - (pR - m_t) \frac{\cos \theta'}{\cos \alpha} \sin \beta \right] \times d(R\beta)$$

积分并整理后得到  $T$  的最后表达式:

$$T = (m_t R - pR^2) \frac{\cos \theta - \cos \theta'}{\sin \alpha} - pR^2 \frac{\theta - \theta'}{2\alpha}$$

(4-3-15)

而剪力则可由方程 (4-3-13) 求得:

$$Q_v = \int_0^{\theta'} p \frac{\beta'}{\alpha} d(R\beta') - \int_0^{\theta} p \frac{\beta}{\alpha} d(R\beta)$$

$$= pR \left( \frac{\alpha}{2} - \theta \right)$$

(4-3-16)

(三) 弯矩  $M_{i-1}$ ,  $M_i$  作用于简支梁的情形 (图 4-9)

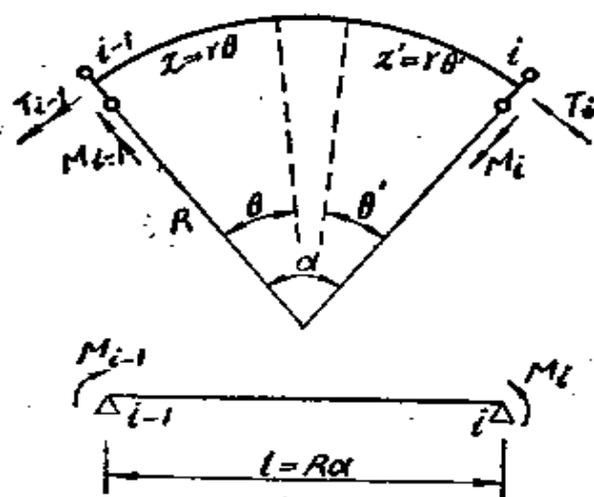


图 4-9 两端受弯矩  $M_{i-1}$  及  $M_i$  作用

首先求解静定体系在相应荷载作用的内力表达式。如果去掉  $i$  支座处的扭转约束, 则相应静定体系下的支座反力是:

$$\left. \begin{aligned} V_{i-1} &= -V_i = -\frac{M_{i-1} - M_i \cos \alpha}{R \sin \alpha} \\ T_{i-1} &= -\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} (M_{i-1} + M_i) \end{aligned} \right\} \quad (4-3-17)$$

梁中任一截面处的内力可用平衡关系求得:

$$T_p = \frac{\cos \theta' - 1}{\sin \alpha} M_{i-1} - \frac{\cos \theta - \cos \alpha}{\sin \alpha} M_i \quad (4-3-18)$$

$$M_{pp} = \frac{\sin \theta'}{\sin \alpha} M_{i-1} + \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} M_i \quad (4-3-19)$$

$$Q_{pp} = -\frac{M_{i-1} - M_i \cos \alpha}{R \sin \alpha} \quad (4-3-20)$$

将(4-3-18)式中的  $T_p$  代入(4-3-9)式求得此时的冗力  $T_i$ :

$$\begin{aligned} T_i &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \left( \frac{\cos \theta' - 1}{\sin \alpha} M_{i-1} - \frac{\cos \theta - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right. \\ &\quad \left. \times M_i \right) d\theta \\ &= \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} \right) M_{i-1} - \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) M_i \end{aligned} \quad (4-3-21)$$

前面方程(4-3-7)求出了静定体系在  $T_i=1$  作用下的截面内力。因此,根据叠加原理,基本体系在两端弯矩  $M_{i-1}$  和  $M_i$  作用下任一截面处的内力是:

$$\begin{aligned} T &= T_p + \bar{T} T_i \\ &= \left( \frac{\cos \theta'}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) M_{i-1} \\ &\quad - \left( \frac{\cos \theta}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) M_i \end{aligned}$$

$$(4-3-22)$$

$$\begin{aligned} M_x &= M_{xp} + \bar{M}_x T_i \\ &= \frac{\sin \theta'}{\sin \alpha} M_{i-1} + \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} M_i \end{aligned}$$

$$(4-3-23)$$

$$\begin{aligned} Q_y &= Q_{yp} + \bar{Q}_y T_i \\ &= -\frac{M_{i-1} - M_i}{l} \end{aligned}$$

$$(4-3-24)$$

以上三种情形下的位移将在下一节中讨论。

### 三、用传递矩阵法进行纯扭转分析

#### (一) 微分方程求解

将弯梁用若干横截面分成若干弯梁单元。各单元采用如图 4-10 所示的流动坐标系  $x-y-z$ 。作用在各坐标系方向之内力与变形可定义为：

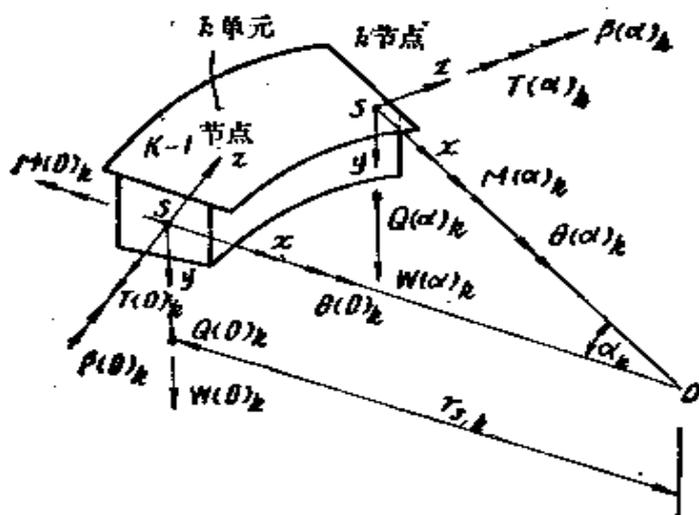


图 4-10  $k$  单元的三端内与变形

- $W_k$  ——  $y$  方向的挠度；
- $\beta_k$  —— 绕  $z$  轴的扭转角；
- $\theta_k$  —— 绕  $x$  轴的挠曲角；

$M_k$ ——绕  $x$  轴的弯矩;  
 $T_k$ ——绕  $z$  轴的扭矩;  
 $Q_k$ —— $y$  方向的剪力。

上述各参数符号中之  $k$  表示单元号。

图 4—10 中各参数标 (0) 者为单元之左端值, 标 ( $\alpha$ ) 者为单元之右端值。图 4—10 中  $\alpha_k$  为单元的中心角,  $r_{s,k}$  为  $k$  单元的曲率半径。

### 1. 内力的齐次解

图 4—11 显示作用在  $k$  单元某微段上的荷载及内力, 根据力的平衡条件可得:

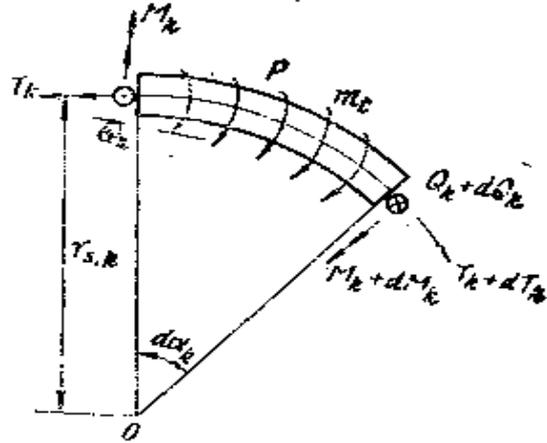


图 4—11 单元内微段内力的平衡

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_k}{d\alpha_k} + T_k - Q_k r_{s,k} &= 0 \\ \frac{dT_k}{d\alpha_k} - M_k &= -m_t r_{s,k} \\ \frac{dQ_k}{d\alpha_k} &= -P r_{s,k} \end{aligned} \right\} \quad (4-3-25)$$

图 4—11 与上述各式中:

$m_t$ ——均布扭矩;

$p$ ——作用在竖向对称面上的均布竖向荷载。

根据以上各方程, 可推导下述关于弯矩  $M_k$  的微分方程:

$$\frac{d^2 M_k}{d\alpha_k^2} + M_k = -r_{s,k}^3 P + r_{s,k} m_t \quad (4-3-26)$$

先不考虑由荷载引起的特解, 上述微分方程可写成:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM_k}{d\alpha_k} + T_k - Q_k \gamma_{,k} &= 0 \\ \frac{dT_k}{d\alpha_k} - M_k &= 0 \\ \frac{dQ_k}{d\alpha_k} &= 0 \\ \frac{d^2 M_k}{d\alpha_k^2} + M_k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-3-27)$$

求解上述微分方程可得内力齐次解。注意：这里采用右端各参数由左端各参数来表示：

$$\left. \begin{aligned} M(\alpha)_k &= M(0)_k \cos \alpha_k - T(0)_k \sin \alpha_k \\ &\quad + Q(0)_k \gamma_{,k} \sin \alpha_k \\ T(\alpha)_k &= M(0)_k \sin \alpha_k + T(0)_k \cos \alpha_k \\ &\quad + Q(0)_k (1 - \cos \alpha_k) \\ Q(\alpha)_k &= Q(0)_k \end{aligned} \right\} \quad (4-3-28)$$

## 2. 变形的齐次解

图 4—12 表示弯梁  $k$  单元某微段上扭转角  $\beta_k$  及挠曲角  $\theta_k$  的变化。

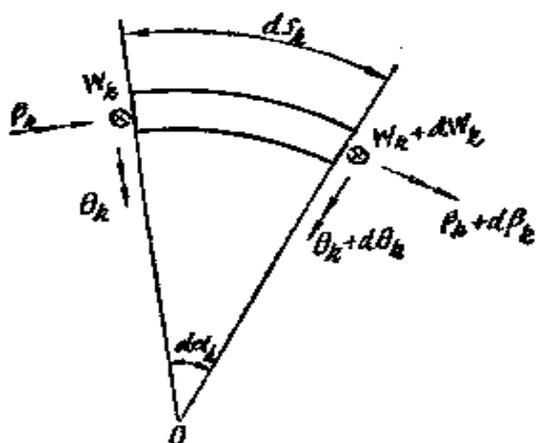


图 4—12 单元内微段变形的变化

根据几何关系和材料力学原理，可得到内力与变形关系方程

$$\left. \begin{aligned} E_k I_k \left( \frac{d\theta_k}{dS_k} - \frac{\beta_k}{r_{s,k}} \right) &= -M_k \\ G_k K_k \left( \frac{d\beta_k}{dS_k} + \frac{\theta_k}{r_{s,k}} \right) &= -T_k \end{aligned} \right\} \quad (4-3-29)$$

式中  $E_k$  ——  $k$  单元材料的弹性模量；  
 $I_k$  ——  $k$  单元截面惯性矩；  
 $G_k$  ——  $k$  单元材料的剪切弹性模量；  
 $K_k$  ——  $k$  单元截面纯扭转系数。

另知

$$\theta_k = - \frac{dW_k}{r_{s,k} d\alpha_k} \quad (4-3-30)$$

由(4-3-29)、(4-3-30)各式可推得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\theta_k}{r_{s,k}^2 d\alpha_k^2} + \frac{\theta_k}{r_{s,k}^2} &= - \frac{1}{E_k I_k} \frac{dM_k}{r_{s,k} d\alpha_k} + \frac{1}{r_{s,k}} \frac{T_k}{G_k K_k} \\ \beta(\alpha)_k &= \int_0^{\alpha_k} r_{s,k} \left( - \frac{T_k}{G_k K_k} + \frac{\theta_k}{r_{s,k}} \right) d\alpha_k + \theta(0)_k \cos \alpha_k \\ \omega(\alpha)_k &= - \int_0^{\alpha_k} r_{s,k} \theta_k d\alpha_k + \omega(0)_k \end{aligned} \right\} \quad (4-3-31)$$

求解式(4-3-31)，可得变形的齐次解，（同样采用右端各参数由左端各参数来表示）。

$$\begin{aligned} W(\alpha)_k &= W(0)_k - \beta(0)_k r_{s,k} (\cos \alpha_k - 1) \\ &\quad - \theta(0)_k r_{s,k} \sin \alpha_k + M(0)_k r_{s,k}^2 \left[ \left( \frac{1}{E_k I_k} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{G_k K_k} \right) (\cos \alpha_k + \frac{\alpha_k}{2} \sin \alpha_k) - \frac{1}{E_k I_k} \cos \alpha_k \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{G_k K_k} \right] - T(0)_k \left[ \frac{r_{s,k}^2}{2} \left( \frac{1}{E_k I_k} + \frac{1}{G_k K_k} \right) \times (\sin \alpha_k \right. \\ &\quad \left. - \alpha_k \cos \alpha_k) \right] - Q(0)_k r_{s,k}^3 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_k I_k} + \frac{1}{G_k K_k} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\times (a_k \cos \alpha_k - \sin \alpha_k) + \frac{1}{G_k K_k} (a_k - \sin \alpha_k) \quad (4-3-32a)$$

$$\begin{aligned} \beta(\alpha)_k &= \beta(0)_k \cos \alpha_k + \theta(0)_k \sin \alpha_k \\ &\quad - M(0)_k r_{1k} \left[ \left( \frac{1}{E_k I_k} + \frac{1}{G_k K_k} \right) \frac{a_k^2}{2} \sin \alpha_k \right] \\ &\quad - T(0)_k r_{1k} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_k I_k} + \frac{1}{G_k K_k} \right) \times (\sin \alpha_k \right. \\ &\quad \left. - a_k \cos \alpha_k) - \frac{1}{G_k K_k} \sin \alpha_k \right] \\ &\quad - Q(0)_k r_{1k}^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_k I_k} + \frac{1}{G_k K_k} \right) \times (\sin \alpha_k \right. \\ &\quad \left. - a_k \cos \alpha_k) \right] \quad (4-3-32b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(\alpha)_k &= -\beta(0)_k \sin \alpha_k + \theta(0)_k \cos \alpha_k \\ &\quad + M(0)_k r_{1k} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_k I_k} + \frac{1}{G_k K_k} \right) \times (\sin \alpha_k \right. \\ &\quad \left. - a_k \cos \alpha_k) - \frac{1}{E_k I_k} \sin \alpha_k \right] \\ &\quad + T(0)_k \left[ \frac{r_{1k}}{2} \left( \frac{1}{E_k I_k} + \frac{1}{G_k K_k} \right) \times a_k \sin \alpha_k \right] \\ &\quad + Q(0)_k r_{1k}^2 \left[ \frac{1}{G_k K_k} (1 - \cos \alpha_k) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_k I_k} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{G_k K_k} \right) \times a_k \sin \alpha_k \right] \quad (4-3-32c) \end{aligned}$$

### 3. 内力与变形的特解

特解随荷载条件不同而异，以图4-13所示荷载，参照前述式(4-3-27)及(4-3-29)，利用下列微分方程求解。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{Q}_k}{d\alpha_k} &= - \int_{r_1}^{r_0} q \rho_k U(\alpha_k - \phi_k) d\rho_k \\ \frac{d^2 \bar{M}_k}{d\alpha_k^2} + \bar{M}_k &= q L_{2k} U(\alpha_k - \phi_k) \end{aligned} \right\} \quad (4-3-33)$$

式中  $q$  —— 部分匀布荷载;  
 $\phi_k, r_0, r_1$  如图所示;  
 $\rho_k$  —— 径向变量;

$$L_{1k} = \frac{1}{2} r_{1k} (r_{0k}^2 - r_{1k}^2)$$

$$L_{2k} = \frac{1}{3} (r_{0k}^3 - r_{1k}^3)$$

$$L_{3k} = r_{1k}^2 (r_{0k} - r_{1k})$$

$U$  称作  $U$  函数 (The Unit step function)

可得:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}_k &= \frac{q r_c r_{1k}}{2 G_k K_k} \left\{ L_{2k} \left( \frac{G_k K_k}{E_k I_k} + 1 \right) [2 - (\alpha_k - \phi_k) \sin(\alpha_k - \phi_k) - 2 \cos(\alpha_k - \phi_k)] + L_{1k} [2 - (\alpha_k - \phi_k)^2 - 2 \cos(\alpha_k - \phi_k)] \right\} \\ \bar{\beta}_k &= \frac{q r_{1k}}{2 G_k K_k} \left\{ L_{2k} \left( \frac{G_k K_k}{E_k I_k} + 1 \right) [-2 - (\alpha_k - \phi_k) \sin(\alpha_k - \phi_k) + 2 \cos(\alpha_k - \phi_k)] + 2(L_{2k} - L_{1k}) [1 - \cos(\alpha_k - \phi_k)] \right\} \\ \bar{\theta}_k &= \frac{q r_{1k}}{2 G_k K_k} \left\{ L_{2k} \left( \frac{G_k K_k}{E_k I_k} + 1 \right) [(\alpha_k - \phi_k) \cos(\alpha_k - \phi_k) - \sin(\alpha_k - \phi_k)] + 2L_{1k} [(\alpha_k - \phi_k) - \sin(\alpha_k - \phi_k)] \right\} \\ \bar{M}_k &= q L_{2k} [1 - \cos(\alpha_k - \phi_k)] \\ T_k &= q [L_{1k} (\alpha_k - \phi_k) - L_{2k} \sin(\alpha_k - \phi_k)] \\ \bar{Q}_k &= \frac{q L_{1k}}{r_{1k}} (\alpha_k - \phi_k) \end{aligned} \right\}$$

(4-3-34)

## (二) 单元内传递矩阵的推导

### 1. 公式的无量纲化

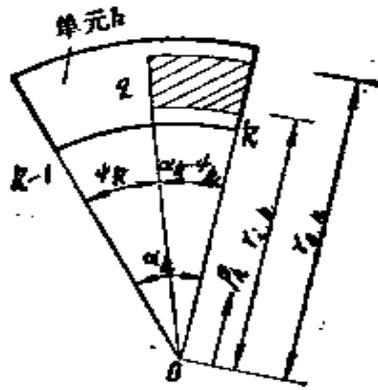


图 4—13 部分匀布荷载

为了简化数值计算，对上式各参数进行无量纲化处理，用无量纲参数  $\omega^*$ 、 $\beta^*$ 、 $\theta^*$ 、 $M^*$ 、 $T^*$ 、 $Q^*$  代替式中的  $W$ 、 $\beta$ 、 $\theta$ 、 $M$ 、 $T$ 、 $Q$  它们的换算关系为：

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega^* \frac{P_c r_c^3}{E_c I_c} & M &= M^* P_c r_c \\ \beta &= \beta^* \frac{P_c r_c^2}{E_c I_c} & T &= T^* P_c r_c \\ \theta &= \theta^* \frac{P_c r_c^2}{E_c I_c} & Q &= Q^* P_c \end{aligned} \right\} (4-3-35)$$

引进：

$$\left. \begin{aligned} f_k &= \frac{G_k K_k}{E_k I_k} & g_k &= \frac{E_c I_c}{E_k I_k} \end{aligned} \right\}$$

上述式中  $P_c$ 、 $r_c$ 、 $E_c$  和  $I_c$  是任意选取之数，其量纲分别与  $P$ 、 $r_k$ 、 $E_k$  和  $I_k$  相同。其值的选取原则是使以后各矩阵元素计算简单。

## 2. 单元内传递矩阵

将单元左端与右端的状态向量  $h(0)_k^*$  与  $h(\alpha)_k^*$  分别写成

$$h(0)_k^* = [W(0)_k^*, \beta(0)_k^*, \theta(0)_k^*, M(0)_k^*, T(0)_k^*, Q(0)_k^*, 1]$$

$$h(\alpha)_k^* = [W(\alpha)_k^*, \beta(\alpha)_k^*, \theta(\alpha)_k^*, M(\alpha)_k^*, T(\alpha)_k^*, Q(\alpha)_k^*, 1]$$

根据前述求得的齐次解与特解,考虑无量纲化处理,可以写成

$$h(a)_k^* = F_k^* \cdot h(0)_k^* \quad (4-3-36)$$

$$F_k^* = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12}^* & \alpha_{13}^* & \alpha_{14}^* & \alpha_{15}^* & \alpha_{16}^* & \overline{W}_k^* \\ 0 & \cos \alpha_k & \sin \alpha_k & \alpha_{24}^* & \alpha_{25}^* & \alpha_{26}^* & \overline{\beta}_k^* \\ 0 & -\sin \alpha_k & \cos \alpha_k & \alpha_{34}^* & \alpha_{35}^* & \alpha_{36}^* & \overline{\theta}_k^* \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_k & -\sin \alpha_k & \alpha_{46}^* & \overline{M}_k^* \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha_k & \cos \alpha_k & \alpha_{56}^* & \overline{T}_k^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \overline{Q}_k^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4-3-37)$$

式中  $F_k^*$  称为单元内传递矩阵, 它的各元素可以按下式计算

$$\begin{aligned} \alpha_{12}^* &= \alpha_{56}^* = \frac{r_{zk}}{r_c} (1 - \cos \alpha_k) \\ \alpha_{13}^* &= -\alpha_{46}^* = -\frac{r_{zk}}{r_c} \sin \alpha_k \\ \alpha_{14}^* &= -\alpha_{36}^* = \frac{g_k}{2f_k} \left( \frac{r_{zk}}{r_c} \right)^2 [ (1 + f_k) \alpha_k \sin \alpha_k \\ &\quad + 2 \cos \alpha_k - 2 ] \\ \alpha_{15}^* &= \alpha_{26}^* = \frac{1 + f_k}{2f_k} g_k \left( \frac{r_{zk}}{r_c} \right)^2 (\alpha_k \cos \alpha_k - \sin \alpha_k) \\ \alpha_{16}^* &= \frac{g_k}{2f_k} \left( \frac{r_{zk}}{r_c} \right)^2 [ (3 + f_k) \sin \alpha_k - (1 \\ &\quad + f_k) \alpha_k \cos \alpha_k - 2 \alpha_k ] \\ \alpha_{24}^* &= -\alpha_{35}^* = -\frac{1 + f_k}{2f_k} g_k \frac{r_{zk}}{r_c} \alpha_k \sin \alpha_k \\ \alpha_{25}^* &= \frac{g_k}{2f_k} \left( \frac{r_{zk}}{r_c} \right) [ (f_k - 1) \sin \alpha_k - (1 + f_k) \alpha_k \cos \alpha_k ] \\ \alpha_{34}^* &= \frac{g_k}{2f_k} \left( \frac{r_{zk}}{r_c} \right) [ (1 - f_k) \sin \alpha_k - (1 + f_k) \alpha_k \cos \alpha_k ] \end{aligned} \quad (4-3-38)$$

关于公式(4-3-27)中的荷载项特解,图4-13所示部分均匀布荷载可查表4-2、图4-14所示径向荷载可查表4-3。

对于图4-15所示集中荷载只要用 $P_0 = P$ ,  $L_{1k} = r_{0k} \cdot r_{Pk}$ 及 $L_{2k} = r_{Pk}^2$ ,可查表4-3。

对于图4-16所示满布均匀布荷载,只要用 $\phi_k = 0$ ,可查表4-2。

对于图4-17所示纵向线荷载,只要用 $q = P_0$ ,  $L_{1k} = r_{0k} \cdot r_{Pk}$ 及 $L_{2k} = r_{Pk}^2$ ,可查表4-2。

### (三) 等截面单跨弯梁的计算

根据计算需要,沿横截面将梁跨分成若干个弯梁单元。如图9所示共分成三个弯梁单元。

按照前述(4-3-37)式,分别求出其单元内传递矩阵为 $F_1^*$ 、 $F_2^*$ 、 $F_3^*$ 。

如果采用一般的抗扭筒支支座,可知

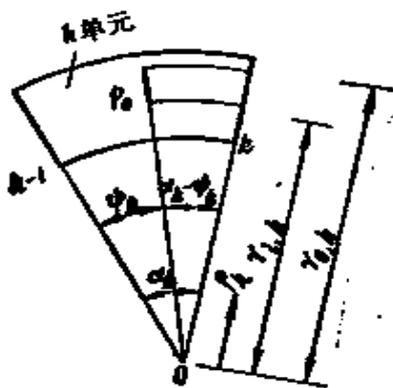


图4-14 径向线荷载

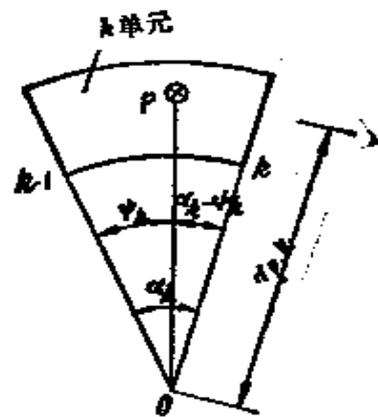


图4-15 集中荷载

$$\omega(0)_i^* = \beta(0)_i^* = M(0)_i^* = 0$$

则梁左端状态向量可写成

图4—13所示部分匀布荷载的荷载项特解

表 4—2

$\bar{\omega}_K^*$	$\frac{qr_{1k}g_K}{2P_c r^2 f_K} \{L_{2K}(f_K+1)[2-(\alpha_K-\phi_K)\sin(\alpha_K-\phi_K)-2\cos(\alpha_K-\phi_K)]+L_{1K}[2-(\alpha_K-\phi_K)^2-2\cos(\alpha_K-\phi_K)]\}$
$\bar{\beta}_K^*$	$\frac{qr_{1k}g_K}{2c_r r^2 f_K} \{L_{2K}(f_K+1)[-2+(\alpha_K-\phi_K)\sin(\alpha_K-\phi_K)+2\cos(\alpha_K-\phi_K)]+2(L_{2K}-L_{1K})[1-\cos(\alpha_K-\phi_K)]\}$
$\bar{\theta}_K^*$	$\frac{qr_{1k}g_K}{2p_r r^2 f_K} \{L_{2K}(f_K+1)[(\alpha_K-\phi_K)\cos(\alpha_K-\phi_K)-\sin(\alpha_K-\phi_K)]+2L_{1K}[(\alpha_K-\phi_K)-\sin(\alpha_K-\phi_K)]\}$
$\bar{M}_K^*$	$\frac{qL_{2K}}{p_c r_c} [1-\cos(\alpha_K-\phi_K)]$
$\bar{T}_K^*$	$\frac{q}{p_c r_c} [L_{1K}(\alpha_K-\phi_K)-L_{2K}\sin(\alpha_K-\phi_K)]$
$\bar{Q}_K^*$	$\frac{qL_{1K}}{p_c r_{1K}} (\alpha_K-\phi_K)$

图4—14所示径向线荷载的荷载项特解

表 4—3

$\bar{\omega}_K^*$	$\frac{p_0 r_{1K} \theta_K}{2p_r r^2 f_K} \{L_{1K}(f_K+1)[-(\alpha_K-\phi_K)\cos(\alpha_K-\phi_K)+\sin(\alpha_K-\phi_K)-2L_{2K}(\alpha_K-\phi_K)-\sin(\alpha_K-\phi_K)]\}$
$\bar{\beta}_K^*$	$\frac{p_0 \theta_K}{2p_r r^2 f_K} \{-L_{1K}(f_K+1)[-(\alpha_K-\phi_K)\cos(\alpha_K-\phi_K)+\sin(\alpha_K-\phi_K)]+2(L_{1K}-L_{2K})\sin(\alpha_K-\phi_K)\}$
$\bar{\theta}_K^*$	$\frac{p_0 \theta_K}{2k_r r^2 f_K} \{-L_{1K}(f_K+1)(\alpha_K-\phi_K)\sin(\alpha_K-\phi_K)+2L_{2K}[1-\cos(\alpha_K-\phi_K)]\}$
$\bar{M}_K^*$	$\frac{p_0 L_{1K}}{p_c r_c r_{1K}} \sin(\alpha_K-\phi_K)$

续上表

$T_{K^*}$	$\frac{p_0}{\rho c \gamma_{c \gamma_{k,K}}} [L_{sK} - L_{Kc} \cos(\alpha_K - \phi_K)]$
$\bar{Q}_{K^*}$	$\frac{p_0 L_{sK}}{\rho c \gamma_{k,K}^2}$

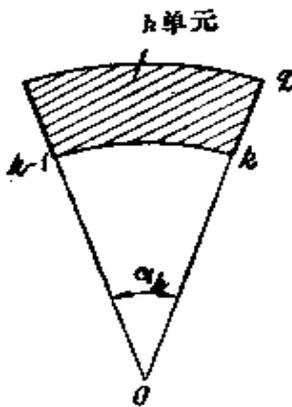


图 4-16 满布均匀荷载

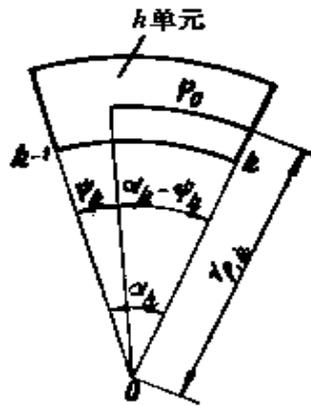


图 4-17 纵向线荷载

$$h(0)_i^* = \begin{Bmatrix} W(0)_i^* \\ \beta(0)_i^* \\ \theta(0)_i^* \\ M(0)_i^* \\ T(0)_i^* \\ Q(0)_i^* \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \theta(0)_i^* \\ T(0)_i^* \\ Q(0)_i^* \\ 1 \end{Bmatrix}$$

简写成

$$h(0)_i^* = H(0)_i^* \times h(0)_i^* \quad (4-3-39)$$

由于节点的连续条件, 可知

第①单元的右端状态向量  $h(\alpha)_1^* =$  第②单元左端向量  $h(0)_2^*$

同理

$$h(\alpha)_2^* = h(0)_3^*$$

根据式(4-3-36), 可得弯梁右端状态向量

$$h(\alpha)_3^* = F_3^* \cdot F_2^* \cdot F_1^* \cdot H(0)_1^* \cdot \bar{h}(0)_1^* \quad (4-3-40)$$

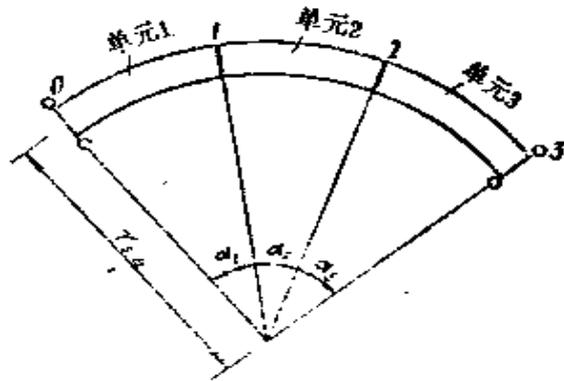


图 4—13 等截面单跨弯梁

从上述分析知道,  $h(\alpha)_3^*$  中每个元素均只包含  $\theta(0)_1^*$ 、 $T(0)_1^*$  和  $Q(0)_1^*$  三个未知数, 如果弯梁右端也采用抗扭简支支座, 可利用  $\omega(\alpha)_3^* = \beta(\alpha)_3^* = M(\alpha)_3^* = 0$  三个边界条件, 得到一只含三个未知数的线性方程组, 解之即可求得  $\theta(0)_1^*$ 、 $T(0)_1^*$  和  $Q(0)_1^*$  三个未知数。

最后利用式(4—3—36)可得

$$h(\alpha)_1^* = h(0)_2^* = F_1^* \cdot H(0)_1^* \cdot \bar{h}(0)_1^*$$

$$h(\alpha)_2^* = h(0)_3^* = F_2^* \cdot h(0)_2^* = F_2^* \cdot F_1^* \cdot H(0)_1^* \cdot \bar{h}(0)_1^*$$

$$h(\alpha)_3^* = F_3^* \cdot h(0)_3^* = F_3^* \cdot F_2^* \cdot F_1^* \cdot H(0)_1^* \cdot \bar{h}(0)_1^*$$

各支点与节点的内力与变形均可求得。

以上各式中符号之下标“1”、“2”及“3”均表示单元序号。

#### 第四节 曲线箱形简支梁的翘曲扭转分析

在本章第二节中我们推导出了曲线梁中各翘曲变量的初参数表达式, 即方程(4—2—7)至(4—2—11)如果代入简支梁的边界条件, 就能解出这些变量的初参数。曲线简支梁的边界条件是:

$$\begin{aligned} \phi(z=0) = 0, \quad \phi(z=l) = 0 \\ B(z=0) = 0, \quad B(z=l) = 0 \end{aligned} \quad (4-4-1)$$

### 一、集中力P和集中扭矩M<sub>z</sub>作用下情形 (图4—6)

将方程(4—3—11)的M<sub>z</sub>表达式代入方程(4—2—7),由φ(z=l)=0,有:

$$\begin{aligned} & \mu G K f_0 s h k l + T_0 (k l - \mu s h k l) - M_z (k b - \mu s h k b) \\ & + \int_0^\beta (P R - M_z) \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \sin \theta [k R (\alpha - \theta) - \mu s h k R (\alpha \\ & - \theta)] d\theta + \int_0^{\beta'} (P R - M_z) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \sin \theta' (k R \theta' \\ & - \mu s h k R \theta') d\theta' = 0 \end{aligned} \quad (a)$$

引入积分:

$$\int_0^\beta s h k R \theta \sin \theta d\theta = \eta (k R \sin \beta \operatorname{ch} k R \beta - \cos \beta s h k R \beta)$$

$$\int_0^{\beta'} c h k R \theta \sin \theta d\theta = \eta (1 + k R \sin \beta' s h k R \beta'$$

$$- \cos \beta' \operatorname{ch} k R \beta')$$

其中

$$\eta = \frac{1}{1 + (k R)^2}$$

$$\int_0^\beta \theta \sin \theta d\theta = \sin \beta - \beta \cos \beta$$

把以上积分代入(a)式并进行整理得到求解初参数f<sub>0</sub>和T<sub>0</sub>的第一条件方程。

$$\begin{aligned} & \mu G K f_0 s h k l + T_0 (k l - \mu s h k l) - M_z (k b - \mu s h k b) \\ & + \frac{P R - M_z}{\sin \alpha} [k R (\alpha \sin \beta' - \beta' \sin \alpha) \\ & - \mu \eta (\sin \beta' s h k l - \sin \alpha s h k b)] = 0 \end{aligned} \quad (b)$$

又将方程(4—3—11)的M<sub>z</sub>表达式代入方程(4—2—9),由B(z=l)=0,有:

$$\begin{aligned} & -\mu G K f_0 s h k l + \mu T_0 s h k l - \mu M_z s h k b \\ & + \mu (P R - M_z) \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \int_0^\beta \sin \theta s h k R (\alpha - \theta) d\theta \end{aligned}$$

$$+\mu(PR - M_z) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \int_0^{\beta'} \sin \theta' \operatorname{sh} k R \theta' d\theta' = 0 \quad (c)$$

对上式积分并整理后得第二个条件方程:

$$\begin{aligned} & -\mu GK f_0 \operatorname{sh} kl + \mu T_0 \operatorname{sh} kl - \mu M_z \operatorname{sh} kb \\ & + \frac{\mu \eta (PR - M_z)}{\sin \alpha} (\sin \beta' \operatorname{sh} kl - \sin \alpha \operatorname{sh} kb) = 0 \end{aligned} \quad (d)$$

对(b)及(d)联立求解, 得

$$T_0 = M_z \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} - PR \left( \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} - \frac{\beta'}{\alpha} \right)$$

由(d)有:

$$\begin{aligned} f_0 = \frac{1}{GK} \left[ T_0 - \frac{\operatorname{sh} kb}{\operatorname{sh} kl} M_z + \eta (PR - M_z) \left( \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\operatorname{sh} kb}{\operatorname{sh} kl} \right) \right] \end{aligned}$$

将解得的初参数 $T_0$ 和 $f_0$ 代入方程(4-2-7)(已知另两个初参数 $\phi_0 = 0, B_0 = 0$ )就可求出曲线简支梁在集中力 $P$ 和集中扭矩 $M_z$ 作用下的截面扭转角 $\phi$ :

$$\begin{aligned} \phi = & + \frac{\mu f_0}{k} \operatorname{sh} kz + \frac{T_0}{GK} \left( z - \frac{\mu}{k} \operatorname{sh} kz \right) \\ & - \frac{M_z}{GK} \left[ (z - a) - \frac{\mu}{k} \operatorname{sh} k(z - a) \right] + \frac{PR - M_z}{kGK} \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \\ & \int_0^\theta [kR(\theta - \lambda) - \mu \operatorname{sh} kR(\theta - \lambda)] \sin \lambda d\lambda \\ & + \frac{PR - M_z}{kGK} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \int_0^{\beta'} (kR\theta' - \mu \operatorname{sh} kR\theta') \sin \theta' d\theta' \end{aligned} \quad (4-4-2)$$

当 $0 \leq \theta < \beta$ 时

$$\begin{aligned} GK\phi = & (M_z - PR)R \left( 1 - \mu \eta \right) \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \sin \theta + \\ & + PR^2 \frac{\beta'}{\alpha} \theta \end{aligned}$$

$$-\mu \frac{M_z(1-\eta) + \eta PR}{kshkl} shkbshkz \quad (4-4-3a)$$

当  $\beta \leq \theta \leq \alpha$  时:

$$GK\phi = (M_z - PR)R(1 - \mu\eta) \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \sin\theta' + PR^2 \frac{\beta}{\alpha} \theta' \\ - \mu \frac{M_z(1-\eta) + \eta PR}{kshkl} shka shkz' \quad (4-4-3b)$$

由翘曲双力矩与扭转角  $\phi$  的关系  $B = -\beta EI_{\omega} \phi'' - \frac{m_z}{\lambda^2}$

$= -\beta EI_{\omega} \phi'' + \frac{M_z}{R\lambda^2} - \frac{m_z}{\lambda^2}$ , 可求得双力矩的表达式:

当  $0 \leq \theta < \beta$  时

$$B = \mu \frac{M_z(1-\eta) + \eta PR}{kshkl} shkbshkz \\ + (M_z - PR) \mu R \eta \frac{\sin\beta'}{\sin\alpha} \sin\theta \quad (4-4-4a)$$

$$T_{\omega} = B' = \mu \frac{M_z(1-\eta) + \eta PR}{shkl} shkbchkz \\ + (M_z - PR) \mu \eta \frac{\sin\beta'}{\sin\alpha} \cos\theta \quad (4-4-5a)$$

当  $\beta \leq \theta \leq \alpha$  时:

$$B = \mu \frac{M_z(1-\eta) + \eta PR}{shkl} shka shkz' \\ + (M_z - PR) \mu R \eta \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \sin\theta' \quad (4-4-4b)$$

$$T_{\omega} = B' = -\mu \frac{M_z(1-\eta) + \eta PR}{shkl} shkachkz' \\ - (M_z - PR) \mu \eta \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cos\theta' \quad (4-4-5b)$$

解曲梁中的挠度微分方程 (4-1-11) 就能得到挠度  $W$  的表达式。

当  $0 \leq \theta < \beta$  时, 把方程(4-3-11a)表示的  $M_z$  和把由方程(4-4-3a)表示的  $\phi$  代入方程(4-1-11)有:

$$\begin{aligned} W_1'' + \frac{W_1}{R^2} &= -\frac{M_z}{EI_z} + \frac{\phi}{R} \\ &= -\frac{PR - M_z}{EI_z} \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \sin \theta + \frac{1}{GK} [(M_z \\ &\quad - PR)(1 - \mu\eta) \\ &\quad \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \sin \theta + PR \frac{\beta'}{\alpha} \theta \\ &\quad - \mu \frac{M_z(1 - \eta) + \eta PR}{kR} \frac{\text{sh}kb}{\text{sh}kl} \text{sh}kz] \end{aligned}$$

令:

$$A_1 = \frac{M_z - PR}{EI_z} \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} [1 + X(1 - \mu\eta)]$$

$$A_2 = \frac{X\beta'PR}{\alpha EI_z}$$

$$A_3 = -\frac{X\mu}{EI_z} \frac{M_z(1 - \eta) + \eta PR}{kR} \frac{\text{sh}kb}{\text{sh}kl}$$

$$X = \frac{EI_z}{GK}$$

则

$$W_1'' + \frac{W_1}{R^2} = A_1 \sin \theta + A_2 \theta + A_3 \text{sh}kR\theta \quad (e)$$

(e)式的通解可写成:

$$\begin{aligned} W_1 &= C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta - \frac{A_1}{2} R^2 \theta \cos \theta + A_2 R^2 \theta \\ &\quad + A_3 \eta R^2 \text{sh}kz \quad (f) \end{aligned}$$

其中  $C_1$  和  $C_2$  为待定系数。由边界条件  $W_1(z=0) = 0$ , 有  $C_2 = 0$ , 而  $C_1$  需要由位移协调条件求得。把  $C_2 = 0$  代入(f), 则

$$W_1 = C_1 \sin \theta - \frac{A_1}{2} R^2 \theta \cos \theta + A_2 R^2 \theta + A_3 \eta R^2 \text{sh}kz \quad (g)$$

同理, 当  $\beta \leq \theta \leq \alpha$  时, 可得到与(g)式类似的方程:

$$W_{11} = C'_1 \sin \theta' - \frac{A'_1}{2} R^2 \theta' \cos \theta' + A'_2 R^2 \theta' \quad (h)$$

其中

$$A'_1 = \frac{M_2 - PR}{EI_x} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} [1 + X(1 - \mu\eta)]$$

$$A'_2 = \frac{X\beta PR}{\alpha EI_x}$$

$$A'_3 = -\frac{X\mu M_2(1 - \eta) + \eta PR}{EI_x} \frac{\operatorname{sh} k a}{kR} \frac{\operatorname{sh} k l}{\operatorname{sh} k l}$$

$C'_i$  是待定系数。

根据位移协调条件

$$W_1(\theta = \beta) = W_{11}(\theta' = \beta') \text{ 和 } W'_1(\theta = \beta) = -W'_{11}(\theta' = \beta')$$

可得到求解待定系数  $C_1$  和  $C'_1$  的联立方程组:

$$\left. \begin{aligned} C_1 \sin \beta - C'_1 \sin \beta' &= D_1 \\ C_1 \cos \beta + C'_1 \cos \beta' &= D_2 \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

式中

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{R_2}{2} (A_1 \beta \cos \beta - A'_1 \beta' \cos \beta') - R^2 (A_2 \beta \\ &\quad - A'_2 \beta') - \eta R^2 (A_3 \operatorname{sh} k a - A'_3 \operatorname{sh} k b) \\ &= \frac{R^2 [1 + X(1 - \mu\eta)] (M_2 - PR)}{2 \sin \alpha EI_x} (\beta \cos \beta \sin \beta \\ &\quad - A'_1 \beta' \cos \beta' \sin \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \frac{R^2}{2} [A_1 (\cos \beta - \beta \sin \beta) + A'_1 (\cos \beta' - \beta' \sin \beta')] \\ &\quad - R^2 (A_2 + A'_2) - \eta k R^3 (A_3 \operatorname{ch} k a + A'_3 \operatorname{ch} k b) \\ &= \frac{R^2 [1 + X(1 - \mu\eta)] (M_2 - PR)}{2 \sin \alpha EI_x} (\sin \alpha - \\ &\quad - \beta \sin \beta \sin \beta' - \beta' \sin \beta' \sin \beta) \\ &\quad - \frac{XPR^3}{EI_x} + X\mu\eta R^2 \frac{M_2(1 - \eta) + \eta PR}{GK} \end{aligned}$$

解联立方程组 (i) 得:

$$\begin{aligned}
 C_1 = & \frac{R^2[1 + X(1 - \mu\eta)](M_z - PR)}{2 \sin \alpha EI_z} (\sin \beta' \\
 & - \alpha \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \beta \cos \beta') - \frac{XPR^3}{EI_z} \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \\
 & + X\mu\eta R^2 \frac{M_z(1 - \eta) + \eta PR}{EI_z} \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \quad (j)
 \end{aligned}$$

把 $C_1$ 以及 $A_1$ ,  $A_2$ 和 $A_3$ 代入(g)式, 就能得到在 $0 \leq \theta < \beta$ 区间的挠度表达式:

$$\begin{aligned}
 EI_z W_1 = & \frac{R^2}{2} [1 + X(1 - \mu\eta)] (M_z - PR) [(\sin \beta' \\
 & - \alpha \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \beta \cos \beta') \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} - \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \theta \cos \theta] \\
 & - XPR^3 \left( \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \sin \theta - \frac{\beta'}{\alpha} \theta \right) \\
 & + X\mu\eta R^2 [M_z(1 - \eta) + \eta PR] \left( \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \sin \theta \right. \\
 & \left. - \frac{\text{sh}kb}{kR \text{sh}kl} \text{sh}kz \right) \quad (4-4-6a)
 \end{aligned}$$

同理, 可得当 $\beta \leq \theta \leq \alpha$ 时的挠度表达式:

$$\begin{aligned}
 EI_z W_{11} = & \frac{R^2}{2} [1 + X(1 - \mu\eta)] (M_z - PR) [(\sin \beta \\
 & - \alpha \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} + \beta' \cos \beta) \frac{\sin \theta'}{\sin \alpha} \\
 & - \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \theta' \cos \theta'] - XPR^3 \left( \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \sin \theta' \right. \\
 & \left. - \frac{\beta}{\alpha} \theta' \right) + X\mu\eta R^2 [M_z(1 - \eta) \\
 & + \eta PR] \left( \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \sin \theta' - \frac{\text{sh}ka}{kR \text{sh}kl} \text{sh}kz' \right) \\
 & \quad (4-4-6b)
 \end{aligned}$$

在方程(4-4-3)和(4-4-6)各式中去掉与翘曲有关的量, 则可得到只考虑纯扭转时的位移表达式:

当 $0 \leq \theta < \beta$ 时

$$GK\phi = (M_z - PR)R \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \sin \theta + PR^2 \frac{\beta'}{\alpha} \theta \quad (4-4-7a)$$

$$EI_1 W_1 = \frac{R^2}{2} (1+X)(M - PR) \left[ \left( \sin \beta' - \alpha \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \beta \cos \beta' \right) \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} - \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \theta \cos \theta \right] - XPR^2 \left( \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \sin \theta - \frac{\beta'}{\alpha} \theta \right) \quad (4-4-8a)$$

当  $\beta \leq \theta \leq \alpha$  时:

$$GK\phi = (M - PR)R \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \sin \theta' + PR^2 \frac{\beta}{\alpha} \theta' \quad (4-4-7b)$$

$$EI_1 W_{11} = \frac{R^2}{2} (1+X)(M - PR) \left[ \left( \sin \beta - \alpha \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} + \beta' \cos \beta \right) \frac{\sin \theta'}{\sin \alpha} - \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \theta' \cos \theta' \right] - XPR^2 \left( \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \sin \theta' - \frac{\beta}{\alpha} \theta' \right) \quad (4-4-8b)$$

## 二、均布力 $p$ 和均布扭矩 $m$ 作用下的情形 (图 4-8)

均布荷载作用下基本体系的翘曲变量可利用在集中荷载作用下的变量表达式进行分段积分得到。因此, 由(4-4-3)式求得在均布荷载作用下基本体系的扭转角:

$$GK\phi = \int_0^{\theta'} \left[ (m_t - pR)R (1 - \mu\eta) \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \sin \theta + pR^2 \frac{\beta'}{\alpha} \theta \right] d(R\beta') - \int_0^{\theta'} \mu \frac{m_t (1 - \eta) + \eta pR}{k^2 \operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} kz \operatorname{sh} kb d(kb) + \int_0^{\theta} \left[ (m_t - PR)R (1 - \mu\eta) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \sin \theta' \right]$$

$$+ pR^2 \frac{\beta}{\alpha} \theta'] d(R\beta) \\ - \int_0^z \mu \frac{m_i(1-\eta) + \eta pR}{k^2 \operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} kz' \operatorname{sh} ka d(ka)$$

对上式积分并整理得:

$$GK\phi = R^2(m_i - pR)(1 - \mu\eta) \left( \frac{\sin \theta + \sin \theta'}{\sin \alpha} - 1 \right) \\ + \frac{pR^3}{2} \theta \theta' - \mu \frac{m_i(1-\eta) + \eta pR}{k^2} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} kz + \operatorname{sh} kz'}{\operatorname{sh} kl} \right) \quad (4-4-9)$$

同理, 由(4-4-4)式可求得翘曲双力矩:

$$B = \mu \frac{m_i(1-\eta) + \eta pR}{k^2} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} kz + \operatorname{sh} kz'}{\operatorname{sh} kl} \right) \\ + (m_i - pR) \mu R^2 \eta \left( \frac{\sin \theta + \sin \theta'}{\sin \alpha} - 1 \right) \quad (4-4-10)$$

$$T_o = B' = -\mu \frac{m_i(1-\eta) + \eta pR}{k} \cdot \frac{\operatorname{ch} kz - \operatorname{ch} kz'}{\operatorname{sh} kl} \\ + (m_i - pR) \mu R \eta \frac{\cos \theta - \cos \theta'}{\sin \alpha} \quad (4-4-11)$$

由(4-4-6)式积分可得到挠度表达式:

$$EI_x W = R^3(pR - m_i) [1 + X(1 - \mu\eta)] \left[ 1 + \frac{\theta \cos \theta + \theta' \cos \theta'}{2 \sin \alpha} - \left( 1 + \frac{\alpha}{2 \tan \alpha} \right) \frac{\sin \theta + \sin \theta'}{\sin \alpha} \right] \\ - X p R^4 \left( \frac{\sin \theta + \sin \theta'}{\sin \alpha} - 1 - \frac{\theta \theta'}{2} \right) \\ + X \mu \frac{m_i(1-\eta) + \eta pR}{k^2} R \left[ (1 - \eta) \frac{\sin \theta + \sin \theta'}{\sin \alpha} - 1 + \eta \frac{\operatorname{sh} kz + \operatorname{sh} kz'}{\operatorname{sh} kl} \right] \quad (4-4-12)$$

如果只考虑纯扭转, 则与之对应的位移是:

$$GK\phi = R^2(m_i - pR) \left( \frac{\sin \theta + \sin \theta'}{\sin \alpha} - 1 \right) + \frac{pR^3}{2} \theta \theta' \quad (4-4-13)$$

$$EI_w = R^3(pR - m_i)(1 + X) \left[ 1 + \frac{\theta \cos \theta + \theta' \cos \theta'}{2 \sin \alpha} - \left( 1 + \frac{\alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} \right) \frac{\sin \theta + \sin \theta'}{\sin \alpha} \right] - X p R^4 \left( \frac{\sin \theta + \sin \theta'}{\sin \alpha} - 1 - \frac{\theta \theta'}{2} \right) \quad (4-4-14)$$

### 三、弯矩 $M_{i-1}$ 和 $M_i$ 作用于基本体系 两端的情形 (图 4-9)

同前面的分析一样, 首先要把相应的边界条件代入翘曲变量的初参数表达式, 解出初参数, 才能求得所需的翘曲变量。这里的边界条件与 (4-4-1) 式相同。通过一系列的数学推演后  
可得:

$$GK\phi = R \left[ \frac{\theta}{\alpha} - (1 - \mu\eta) \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} - \mu\eta \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl} \right] M_i + R \left[ -\frac{\theta'}{\alpha} - (1 - \mu\eta) \frac{\sin \theta'}{\sin \alpha} - \mu\eta \frac{\operatorname{sh} kz'}{\operatorname{sh} kl} \right] M_{i-1} \quad (4-4-15)$$

$$B = -\mu\eta R \left[ \left( \frac{\sin \theta'}{\sin \alpha} - \frac{\operatorname{sh} kz'}{\operatorname{sh} kl} \right) M_{i-1} + \left( \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} - \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl} \right) M_i \right] \quad (4-4-16)$$

$$T_s = B' = \mu\eta \left[ \left( \frac{\cos \theta'}{\sin \alpha} - kR \frac{\operatorname{ch} kz'}{\operatorname{sh} kl} \right) M_{i-1} - \left( \frac{\cos \theta}{\sin \alpha} - kR \frac{\operatorname{ch} kz}{\operatorname{sh} kl} \right) M_i \right] \quad (4-4-17)$$

$$EI_w = R^2 \left\{ \left[ 1 + X(1 - \mu\eta) \right] \frac{\alpha \sin \theta' - \theta' \sin \alpha \cos \theta}{2 \sin^2 \alpha} - X \left( \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} - \frac{\theta}{\alpha} \right) + X \mu \eta^2 \left( \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\text{sh}kz}{\text{sh}kl} \Big) \Big\} M_i + R^2 \left[ (1 + X(1 \right. \\
 & - \mu\eta) \Big] \frac{\alpha \sin \theta - \theta \sin \alpha \cos \theta'}{2 \sin^2 \alpha} - X \left( \frac{\sin \theta'}{\sin \alpha} \right. \\
 & \left. - \frac{\theta'}{\alpha} \right) + X \mu \eta^2 \left( \frac{\sin \theta'}{\sin \alpha} - \frac{\text{sh}kz'}{\text{sh}kl} \right) \Big\} M_{i-1} \\
 & \hspace{15em} (4-4-18)
 \end{aligned}$$

与纯扭转对应的位移是:

$$GK\phi = R \left( \frac{\theta'}{\alpha} - \frac{\sin \theta'}{\sin \alpha} \right) M_{i-1} + R \left( \frac{\theta}{\alpha} - \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \right) M_i, \quad (4-4-19)$$

$$\begin{aligned}
 EI_s W = R^2 \Big\{ & (1 + X) \frac{\alpha \sin \theta' - \theta' \sin \alpha \cos \theta}{2 \sin^2 \alpha} \\
 & - X \left( \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} - \frac{\theta}{\alpha} \right) \Big\} M_i \\
 & + R^2 \Big\{ (1 + X) \frac{\alpha \sin \theta - \theta \sin \alpha \cos \theta'}{2 \sin^2 \alpha} \\
 & - X \left( \frac{\sin \theta'}{\sin \alpha} - \frac{\theta'}{\alpha} \right) \Big\} M_{i-1} \quad (4-4-20)
 \end{aligned}$$

#### 四、双力矩 $B_{i-1}$ 和 $B_i$ 作用于基本体系两端的情形 (图 4-19)

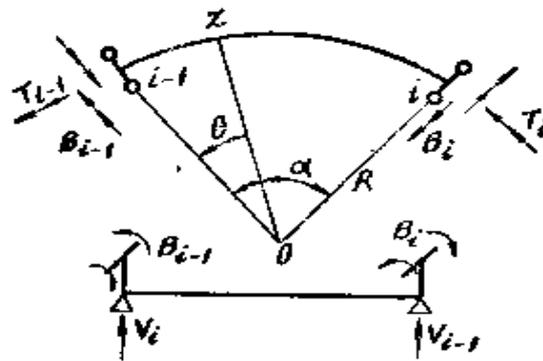


图 4-19 基本体系在两端双力矩  $B_{i-1}$  和  $B_i$  作用下的情形

此时, 相应于静定体系 ( $i$  支座无扭转约束) 下的支座反力

有如下关系式

$$V_{i-1} = -V_i = \frac{T_{i-1}}{R} \quad (4-4-21)$$

梁中任一截面的内力为:

$$M_z = V_{i-1} R \sin \theta - T_{i-1} \sin \theta = 0$$

$$T = V_{i-1} R (1 - \cos \theta) + T_{i-1} \cos \theta = T_{i-1} \quad (4-4-22)$$

从这方程可以看出, 在梁端双力矩  $B_{i-1}$  和  $B_i$  作用下, 整个曲梁的弯矩  $M_z$  均为零, 而其扭矩为一常数, 其值等于左支座扭矩  $T_{i-1}$ 。此时翘曲扭转分析的边界条件是:

$$\phi(Z=0) = 0, \quad \phi(Z=l) = 0$$

$$B(Z=0) = B_{i-1}, \quad B(Z=l) = B_i$$

把  $\phi(Z=l) = 0$  代入方程 (4-2-7) 有

$$\mu GK f_0 \operatorname{sh} kl + k(1 - \operatorname{ch} kl) B_{i-1} + (kl - \mu \operatorname{sh} kl) T_0 = 0$$

把  $B(Z=l) = B_i$  代入方程 (4-2-9) 有

$$-\mu GK f_0 \operatorname{sh} kl + k \operatorname{ch} kl B_{i-1} + \mu \operatorname{sh} kl T_0 = B_i k$$

联立求解以上两式, 得

$$T_0 = \frac{B_i - B_{i-1}}{l}, \quad f_0 = \frac{1}{\mu GK} \left[ \left( \frac{kl}{\mu \operatorname{th} kl} - 1 \right) B_{i-1} + \left( 1 - \frac{kl}{\mu \operatorname{sh} kl} \right) B_i \right]$$

把以上初参数代入有关的翘曲变量表达式得

$$GK \phi = \left( \frac{z'}{l} - \frac{\operatorname{sh} k z'}{\operatorname{sh} kl} \right) B_{i-1} + \left( \frac{Z}{l} - \frac{\operatorname{sh} k z}{\operatorname{sh} kl} \right) B_i \quad (4-4-23)$$

$$B = \frac{\operatorname{sh} k z'}{\operatorname{sh} kl} B_{i-1} + \frac{\operatorname{sh} k z}{\operatorname{sh} kl} B_i \quad (4-4-24)$$

$$T_w = B' = -\frac{k \operatorname{ch} k z'}{\operatorname{sh} kl} B_{i-1} + \frac{k \operatorname{ch} k z}{\operatorname{sh} kl} B_i \quad (4-4-25)$$

$$T = T_0 = \frac{B_i - B_{i-1}}{l} \quad (4-4-26)$$

把求得的扭转角  $\phi$  的表达式代入挠度微分方程 (4-1-11)

并解此微分方程后得：

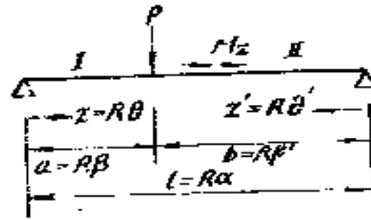
$$EI, W = -XR \left[ (1-\eta) \frac{\sin \theta'}{\sin \alpha} - \frac{\theta'}{\alpha} + \eta \frac{\operatorname{sh} kz'}{\operatorname{sh} kl} \right] B_{i-1} - XR \left[ (1-\eta) \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} - \frac{\theta}{\alpha} + \eta \frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{sh} kl} \right] B_i$$

(4-4-27)

表 4-4

变 量 区 间		表 达 式
$M_x$	I	$(PR - M_z) \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \sin \theta$
	II	$(PR - M_z) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \sin \theta$
$T$	I	$-(PR - M_z) \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \cos \theta + PR \frac{\beta'}{\alpha}$
	II	$(PR - M_z) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cos \theta' - PR \frac{\beta}{\alpha}$
$Q_y$	I	$P \beta' / \alpha$
	II	$-P \beta / \alpha$
$Gk\phi$	I	$-(PR - M_z) R \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \sin \theta + PR \frac{\beta'}{\alpha} \theta$
	II	$-(PR - M_z) R \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \sin \theta' + PR \frac{\beta}{\alpha} \theta'$

集中荷载  $P$  和  $M_z$  作用下  
基本体系的内力与变位：

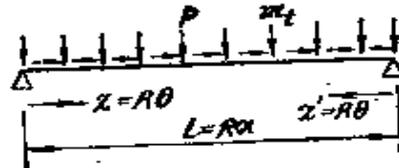


续上表

变 量	区 间	表 达 式
EI, W	I	$\frac{R^2}{2}(M_0 - PR)(1+X) \left[ \left( \sin\beta' + \beta \cos\beta' - a \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \right) \cdot \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} - \frac{\sin\beta'}{\sin\alpha} \theta \cos\theta \right] - XPR^2 \left( \frac{\sin\beta'}{\sin\alpha} \sin\theta - \frac{\beta'}{a} \theta \right)$
	II	$\frac{R^2}{2}(M_0 - PR)(1+X) \left[ \left( \sin\beta + \beta' \cos\beta - a \frac{\sin\beta'}{\sin\alpha} \right) \cdot \frac{\sin\theta'}{\sin\alpha} - \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \theta' \cos\theta' \right] - XPR^2 \left( \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \sin\theta' - \frac{\beta}{a} \theta' \right)$

注:  $X = EI_1/GK$

表 4-5

均布荷载P和m <sub>1</sub> 作用下基本体系的内力与变位	
	
变 量	表 达 式
$M_0$	$(pR - m_1)R \left( \frac{\sin\theta + \sin\theta'}{\sin\alpha} - 1 \right)$
$T$	$-(pR - m_1)R \frac{\cos\theta - \cos\theta'}{\sin\alpha} - pR^2 \frac{\theta - \theta'}{2\alpha}$
$Q_V$	$pR \left( \frac{\alpha}{2} - \theta \right)$
$Gk\phi$	$-(pR - m_1)R^2 \left( \frac{\sin\theta + \sin\theta'}{\sin\alpha} - 1 \right) + \frac{pR^2}{2} \theta\theta'$
$EI, W$	$(pR - m_1)R^2(1+X) \left[ 1 + \frac{\theta \cos\theta + \theta' \cos\theta}{2\sin\alpha} - \left( 1 + \frac{\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} \right) \frac{\sin\theta + \sin\theta'}{\sin\alpha} \right] - XpR^2 \left( \frac{\sin\theta + \sin\theta'}{\sin\alpha} - 1 - \frac{\theta\theta'}{2} \right)$

续上表

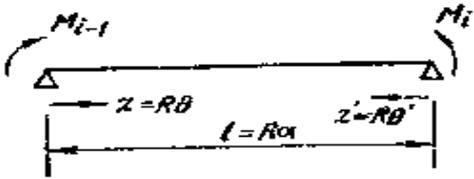
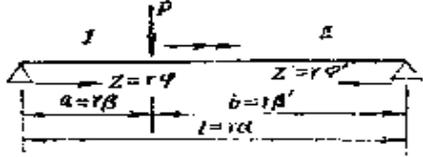
<p>基本体系两端受弯矩M作用时的内力与变位</p> 	
$M_z$	$M_{i-1} \frac{\sin\theta'}{\sin\alpha} + M_i \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}$
$T$	$M_{i-1} \left( \frac{\cos\theta'}{\sin\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) - M_i \left( \frac{\cos\theta}{\sin\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right)$
$Q_z$	$-(M_{i-1} - M_i) / R$
$Gk\phi$	$R \left( \frac{\theta}{\alpha} - \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} \right) M_i + R \left( \frac{\theta'}{\alpha} - \frac{\sin\theta'}{\sin\alpha} \right) M_{i-1}$
$EI_z W$	$R^2 \left[ (1+x) \frac{\alpha \sin\theta' - \theta' \sin\alpha \cos\theta}{2\sin^2\alpha} - x \left( \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} - \frac{\theta}{\alpha} \right) \right] M_i + R^2 \left[ (1+x) \frac{\alpha \sin\theta - \theta \sin\alpha \cos\theta'}{2\sin^2\alpha} - x \left( \frac{\sin\theta'}{\sin\alpha} - \frac{\theta'}{\alpha} \right) \right] M_{i-1}$

表 4—6

<p>作用集中荷载<math>x_p</math>和<math>M_z</math>时基本体系中的内力与变形</p> 		
变 量	区 间	表 达 式
$M_z$	I	$(PR - M_z) \frac{\sin\beta'}{\sin\alpha} \sin\theta$
	II	$(PR - M_z) \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \sin\theta'$

续上表

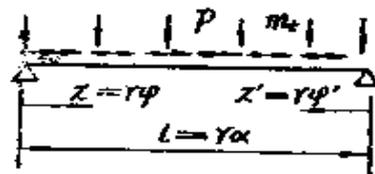
变 量	区 间	表 达 式
T	I	$PR \frac{\beta'}{a} + (M_z - PR) \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \cos \theta$
	II	$-PR \frac{\beta}{a} + (PR - M_z) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cos \theta'$
Q	I	$P \frac{\beta'}{a}$
	II	$-P \frac{\beta}{a}$
$\frac{\beta}{\mu}$	I	$\frac{M_z(1-\eta) + \eta PR}{kshkl} shkbshkz + (M_z - PR) R \eta \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \sin \theta$
	II	$\frac{M_z(1-\eta) + \eta PR}{kshkl} shkashkz' + (M_z - PR) R \eta \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \sin \theta'$
$\frac{\beta'}{\mu}$	I	$\frac{M_z(1-\eta) + \eta PR}{shkl} shkbchkz + (M_z - PR) \eta \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \cos \theta$
	II	$-\frac{M_z(1-\eta) + \eta PR}{shkl} shkachkz' - (M_z - PR) \eta \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cos \theta'$
GKφ	I	$R(M_z - PR)(1 - \mu \eta) \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \sin \theta + PR^2 \frac{\beta'}{a} \theta$ $-\mu \frac{M_z(1-\eta) + \eta PR}{kshkl} shkbshkz$
	II	$R(M_z - PR)(1 - \mu \eta) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \sin \theta' + PR^2 \frac{\beta}{a} \theta'$ $-\mu \frac{M_z(1-\eta) + \eta PR}{kshkl} shkashkz'$
EI <sub>z</sub> W	I	$\frac{R^2}{2} (1 + X(1 - \mu \eta))(M_z - PR) \left[ (\sin \beta' - a \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \beta \cos \beta') \right.$ $\left. \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} - \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \theta \cos \theta \right] - XPR^2 \left( \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \sin \theta - \frac{\beta'}{a} \theta \right)$ $+ X\mu \eta R^2 (M_z(1-\eta) + \eta PR) \left( \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \sin \theta - \frac{shkb}{kRshkl} shkz \right)$

续上表

变 量	区 间	表 达 式
$EI, W$	II	$\frac{R^2}{2}(1+X(1-\mu\eta))(M_1 - PR)\left[\left(\sin\beta - a \frac{\sin\beta'}{\sin\alpha} + \beta' \cos\beta\right) \frac{\sin\theta'}{\sin\alpha} - \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \theta' \cos\theta'\right] - XPR^2 \left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \sin\theta' - \frac{\beta\theta'}{a}\right) + X\mu\eta R^2(M_1(1-\eta) + \eta PR) \left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \sin\theta' - \frac{\text{sh}ka}{kR\text{sh}kl} \text{sh}kz'\right)$

表 4-7

受均布荷载P与m,作用时,  
基本体系中的内力和变形



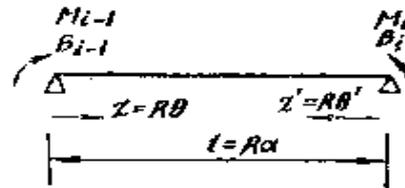
变 量	表 达 式
$M_1$	$(pR^2 - m, R) \left(\frac{\sin\theta + \sin\theta'}{\sin\alpha} - 1\right)$
$T$	$(m, R - pR^2) \frac{\cos\theta - \cos\theta'}{\sin\alpha} - pR^2 \frac{\theta - \theta'}{2\alpha}$
$Q$	$pR \left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)$
$\frac{\beta}{\mu}$	$\frac{m_1(1-\eta) + \eta pR}{k^2} \left(1 - \frac{\text{sh}kz + \text{sh}kz'}{\text{sh}kl}\right) + (m_1 - pR) R^2 \eta \left(\frac{\sin\theta + \sin\theta'}{\sin\alpha} - 1\right)$
$\frac{\beta'}{\mu}$	$-\frac{m_1(1-\eta) + \eta pR}{k} \frac{\text{ch}kz - \text{ch}kz'}{\text{sh}kl} + (m_1 - pR) R \eta \frac{\cos\theta - \cos\theta'}{\sin\alpha}$

续上表

变 量	表 达 式
$GK\phi$	$R^2(m_i - pR)(1 - \mu\eta) \left( \frac{\sin\theta + \sin\theta'}{\sin\alpha} - 1 \right) + \frac{pR^3}{2}\theta\theta'$ $- \mu \frac{m_i(1 - \eta) + \eta pR}{k^2} \left( 1 - \frac{\text{sh}kz + \text{sh}kz'}{\text{sh}kl} \right)$
$EI, W$	$R^2(pR - m_i) \left[ 1 + X(1 - \mu\eta) \right] \left[ 1 + \frac{\theta\cos\theta + \theta'\cos\theta'}{2\sin\alpha} \right]$ $- \left( 1 + \frac{\alpha}{2\text{tg}\alpha} \right) \frac{\sin\theta + \sin\theta'}{\sin\alpha} - X pR \left( \frac{\sin\theta + \sin\theta'}{\sin\alpha} - 1 - \frac{\theta - \theta'}{2} \right)$ $+ X\mu \frac{m_i(1 - \eta) + \eta pR}{k^2} - R(1 - \eta) \frac{\sin\theta + \sin\theta'}{\sin\alpha} - 1$ $+ \eta \frac{\text{sh}kz + \text{sh}kz'}{\text{sh}kl} \Bigg\}$

表 4-8

两端受弯矩  $M$  和双力矩  $B$  作用，基本体系中的内力与变形



变 量	表 达 式
	作用 $M_{i-1}, M_i$ 时
$M_z$	$\frac{\sin\theta'}{\sin\alpha} M_{i-1} + \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} M_i$
$T$	$\left( \frac{\cos\theta'}{\sin\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) M_{i-1} - \left( \frac{\cos\theta}{\sin\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) M_i$
$Q$	$-(M_{i-1} - M_i)/l$
$\frac{B}{\mu}$	$-\eta R \left[ \left( \frac{\sin\theta'}{\sin\alpha} - \frac{\text{sh}kz'}{\text{sh}kl} \right) M_{i-1} + \left( \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} - \frac{\text{sh}kz}{\text{sh}kl} \right) M_i \right]$
$\frac{B'}{\mu}$	$\eta \left[ \left( \frac{\cos\theta'}{\sin\alpha} - kR \frac{\text{ch}kz'}{\text{sh}kl} \right) M_{i-1} - \left( \frac{\cos\theta}{\sin\alpha} - kR \frac{\text{ch}kz}{\text{sh}kl} \right) M_i \right]$

续上表

变 量	表 达 式
$CK\phi$	$R\left[\frac{\theta}{\alpha} - (1-\mu\eta)\frac{\sin\theta}{\sin\alpha} - \mu\eta\frac{\operatorname{sh}kz}{\operatorname{sh}kl}\right] M,$ $+ R\left[\frac{\theta'}{\alpha} - (1-\mu\eta)\frac{\sin\theta'}{\sin\alpha} - \mu\eta\frac{\operatorname{sh}kz'}{\operatorname{sh}kl}\right] M_{,-1}$
$EI, W$	$R^2\left\{(1+X(1-\mu\eta))\frac{\alpha\sin\theta' - \theta'\sin\alpha\cos\theta}{2\sin^2\alpha}\right.$ $- X\left(\frac{\sin\theta}{\sin\alpha} - \frac{\theta}{\alpha}\right) + X\mu\eta^2\left(\frac{\sin\theta}{\sin\alpha} - \frac{\operatorname{sh}kz}{\operatorname{sh}kl}\right)\left.\right\} M,$ $+ R^2\left\{(1+X(1-\mu\eta))\frac{\alpha\sin\theta - \theta\sin\alpha\cos\theta'}{2\sin^2\alpha}\right.$ $- X\left(\frac{\sin\theta'}{\sin\alpha} - \frac{\theta'}{\alpha}\right) + X\mu\eta^2\left(\frac{\sin\theta'}{\sin\alpha} - \frac{\operatorname{sh}kz'}{\operatorname{sh}kl}\right)\left.\right\} M_{,-1}$
	作用 $B_{,-1}, B,$ 时
$M,$	0
$T$	$(B, - B_{,-1})/l$
$Q$	$(B, - B_{,-1})/(lR)$
$B$	$\frac{\operatorname{sh}kz'}{\operatorname{sh}kl}B_{,-1} + \frac{\operatorname{sh}kz}{\operatorname{sh}kl}B,$
$B'$	$-\frac{k\operatorname{ch}kz'}{\operatorname{sh}kl}B_{,-1} + \frac{k\operatorname{ch}kz}{\operatorname{sh}kl}B,$
$GK\phi$	$\left(\frac{z'}{l} - \frac{\operatorname{sh}_i z'}{\operatorname{sh}kl}\right) B_{,-1} + \left(\frac{z}{l} - \frac{\operatorname{sh}kz}{\operatorname{sh}kl}\right) B,$
$EI, W$	$-XR\left\{(1-\eta)\frac{\sin\theta'}{\sin\alpha} - \frac{\theta'}{\alpha} + \eta\frac{\operatorname{sh}kz'}{\operatorname{sh}kl}\right\} B_{,-1}$ $-XR\left\{(1-\eta)\frac{\sin\theta}{\sin\alpha} - \frac{\theta}{\alpha} + \eta\frac{\operatorname{sh}kz}{\operatorname{sh}kl}\right\} B,$

这一节与前一节我们分别讨论了曲线筒支梁的翘曲扭转与纯扭转，在后面连续梁分析中，我们以这些筒支梁为基本体系，为了便于直观地查找公式，我们把这两节所推导的曲线筒支梁在不同荷载作用下的全部内力和位移表达式用表格的形式列出。纯扭转可查见表 4—4 与表 4—5。翘曲扭转可查见表 4—6、表 4

— 7 与表 4—8。

### 第五节 曲线连续梁的纯扭转分析

对于多跨曲线连续梁，如果只考虑纯扭转作用，我们可以把中间各支承处的弯矩作为冗力，即放松中间支承处的转角并代之以冗力弯矩，如图 4—20。这些冗力可以通过支承处的相对转角  $\delta$  为零。对第  $i$  个支承，可写出冗力方程：

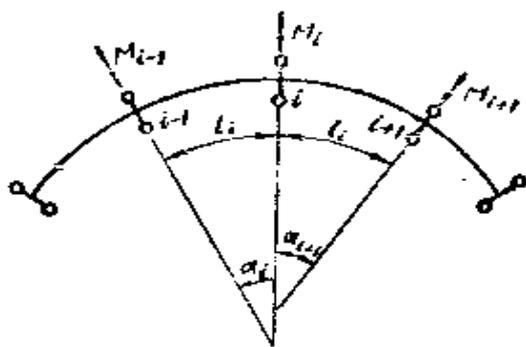


图 4—20 曲线连续梁的纯扭转

$$\delta_{i,i-1}M_{i-1} + \delta_{ii}M_i + \delta_{i,i+1}M_{i+1} + \delta_{i,p} = 0 \quad (4-5-1)$$

式中  $\delta_{ij} (j=i-1, i, i+1)$  是单位冗力作用于第  $j$  支承对第  $i$  支承产生的转角，它包括相邻两跨的影响。我们把  $\delta_{i,p}$  称之为荷载系数。对每一个中间支承都可以写出一个象 (4—5—1) 式这样的冗力方程，而且方程中最多只含三个未知数，所以，方程 (4—5—1) 就是曲线连续梁纯扭转分析中的三弯矩方程。

求出了各支承处的弯矩后，就可把曲线连续梁分为一系列的单跨曲线简支梁分析，也就是前两节讨论的曲线梁基本体系。

#### 一、基本体系的变形系数 $\delta_{ij}$

根据定义， $\delta_{ij}$  即是基本体系右端作用单位弯矩时对左端产生的转角（挠曲角）。由挠曲角与挠度  $W$  的关系

$$\delta = W' \quad (4-5-2)$$

则对方程 (4—4—20) 求一阶导数后，有

$$EI_c W' = R \left[ (1+X) \frac{-\alpha \cos \theta' + \sin \alpha \cos \theta + \theta' \sin \alpha \sin \theta}{2 \sin^2 \alpha} - X \left( \frac{\cos \theta}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \right] M_i$$

$$\begin{aligned}
 &+ R \left[ (1+X) \frac{\alpha \cos \theta - \sin \alpha \cos \theta' - \theta \sin \alpha \sin \theta'}{2 \sin^2 \alpha} \right. \\
 &\left. + X \left( \frac{\cos \theta'}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \right] M_{i-1} \quad (4-5-3)
 \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}
 \delta_{i-1, i-1} = W' |_{\theta=0} = \delta_{ii} = W' |_{\theta=\alpha} \\
 M_{i-1} = 1 \quad M_{i-1} = 0 \\
 M_i = 0 \quad M_i = 1
 \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
 \delta_{i-1, i-1} = \delta_{ii} = \frac{R}{EI_x} \left[ (1+X) \frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} \right. \\
 \left. + X \left( \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \quad (4-5-4)
 \end{aligned}$$

同理, 有

$$\begin{aligned}
 \delta_{i-1, i} = \delta_{i, i-1} = \frac{R}{EI_x} \left[ (1+X) \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} \right. \\
 \left. - X \left( \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \quad (4-5-5)
 \end{aligned}$$

## 二、基本体系的荷载系数 $\delta_{i,p}$

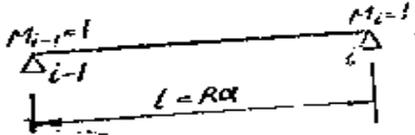
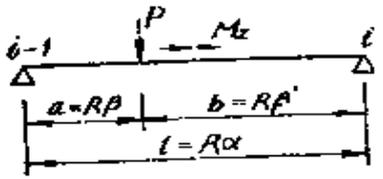
(一) 基本体系在集中力 $P$ 和集中扭矩 $M_z$ 作用下的荷载系数对(4-4-8a)式求一阶导数有:

$$\begin{aligned}
 EI_x W_i' = \frac{R}{2} (1+X) (M_z - P R) \left[ \left( \sin \beta' - \alpha \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right. \right. \\
 \left. \left. + \beta \cos \beta' \right) \frac{\cos \theta}{\sin \alpha} - \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} (\cos \theta - \theta \sin \theta) \right] \\
 - X P R^2 \left( \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} \cos \theta - \frac{\beta'}{\alpha} \right)
 \end{aligned}$$

因此, 得:

$$\begin{aligned}
 \delta_{i-1, p} = W_i' (\theta=0) \\
 = \frac{R^2}{EI_x} \left[ \left( P - \frac{M_z}{R} \right) (1+X) \frac{\alpha \sin \beta - \beta \sin \alpha \cos \beta'}{2 \sin^2 \alpha} \right.
 \end{aligned}$$

表 4—9

<p>基本体系两端作用单位冗力产生的变形系数</p> 	
$\delta_{i-1, i-1} = \delta_{i, i}$	$\frac{R}{EI_s} \left[ (1+X) \frac{\alpha - \sin\alpha \cos\alpha}{2\sin^2\alpha} - X \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\lg\alpha} \right) \right]$
$\delta_{i-1, i} = \delta_{i, i-1}$	$\frac{R}{EI_s} \left[ (1+X) \frac{\sin\alpha - \alpha \cos\alpha}{2\sin^2\alpha} - X \left( \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \right]$
<p>基本体系上作用集中荷载P和M<sub>i</sub>产生的荷载系数</p> 	
$\delta_{i-1, i}^P$	$\frac{R^2}{EI_s} \left[ \left( P - \frac{M_i}{R} \right) (1+X) \frac{\alpha \sin\beta - \beta \cos\beta' \sin\alpha}{2\sin^2\alpha} - X P \left( \frac{\sin\beta'}{\sin\alpha} - \frac{\beta'}{\alpha} \right) \right]$
$\delta_{i, i}^P$	$\frac{R^2}{EI_s} \left[ \left( P - \frac{M_i}{R} \right) (1+X) \frac{\alpha \sin\beta' - \beta' \cos\beta \sin\alpha}{2\sin^2\alpha} - X P \left( \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \right) \right]$
<p>基本体系上作用均布荷载p和m<sub>i</sub>产生的荷载系数</p> 	
$\delta_{i-1, i}^P = \delta_{i, i}^P$	$\frac{R^2}{EI_s} \left[ \left( p - \frac{m_i}{R} \right) (1+X) \frac{\alpha - \sin\alpha}{2(1+\cos\alpha)} - X p \left( \lg \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$

$$-XP\left(\frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} - \frac{\beta'}{d}\right) \quad (4-5-6)$$

同理，对式(4-4-8 b)求一阶导数，取 $\theta' = 0$ 得

$$\begin{aligned} \delta_{i,r} = & \frac{R^2}{EI_x} \left\{ \left( P - \frac{M_z}{R} \right) (1 + X) \frac{\alpha \sin \beta' - \beta' \sin \alpha \cos \beta}{2 \sin^2 \alpha} \right. \\ & \left. + XP \left( \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \right) \right\} \quad (4-5-7) \end{aligned}$$

(二) 基本体系在均布力 $p$ 和均布扭矩 $m$ 作用下的荷载系数  
根据(4-4-14)式关于均布荷载 $p$ 和 $m$ 作用下的位移表达式，并对其求一阶导数后，根据定义可得：

$$\begin{aligned} \delta_{i-1,r} = & \delta_{i,r} \\ = & \frac{R^3}{EI_x} \left\{ \left( p - \frac{m_i}{R} \right) (1 + X) \frac{\alpha - \sin \alpha}{2(1 + \cos \alpha)} \right. \\ & \left. - XP \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right\} \quad (4-5-8) \end{aligned}$$

为了便于查用，将以上纯扭转情况下的变形系数与荷载系数分别列于表4-9。

### 第六节 曲线连续梁的翘曲扭转分析

考虑翘曲时，曲线连续梁的每一个中间支承有两个冗力，即弯矩 $M$ 和翘曲双力矩 $B$ (图-21)。根据变形协调条件，即在每一个中间支承处的相对转角 $\delta$ 和相对翘曲 $\mu$ 均应为零。如对第 $i$ 个支承，可写出冗力方程：

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=i-1}^{i+1} M_j \delta_{ij}^M + \sum_{j=i-1}^{i+1} B_j \delta_{ij}^B + \delta_{i,r} &= 0 \\ \sum_{j=i-1}^{i+1} M_j \mu_{ij}^M + \sum_{j=i-1}^{i+1} B_j \mu_{ij}^B + \mu_{i,r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-6-1)$$

式中 $\delta_{ij}^M$ 代表单位弯矩作用于基本体系 $j$ 端对 $i$ 端产生的转角，而 $\delta_{ij}^B$ 表示单位翘曲双力矩作用于基本体系 $j$ 端对 $i$ 端产生的转角。同样， $\mu_{ij}^M$ 表示相应的翘曲变形。我们 $\delta_{ij}^M$ 和 $\delta_{ij}^B$ 把定义为变形系

数， $\delta_{i,p}$ 和 $\mu_{i,p}$ 定为荷载系数，它们分别代表梁上外荷载作用时对*i*端产生的转角和翘曲变形，其值应包括相邻两端的影响。

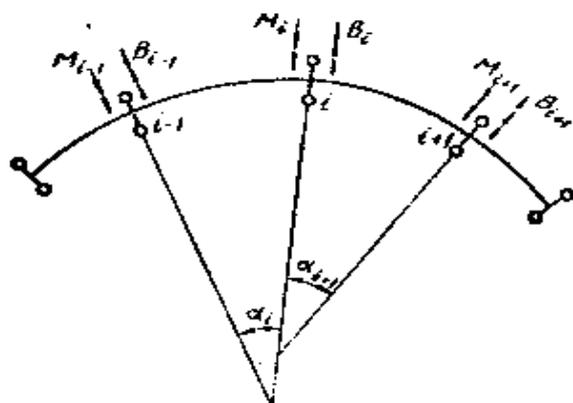


图 4—21 曲线连续梁的翘曲扭转

转角 $\delta$ 所对应的是挠度的一阶导数，即 $\delta = W'$ 。而翘曲变形系数 $\mu$ 所对应的是翘曲位移函数*f*。为了便于查用，我们把这些系数按不同荷载条件分别列于表（4—10）、表（4—11）和表（4—12）其推导过程就不在此赘述了。

如果是几跨连续梁，则可写出 $2(n-1)$ 个类似于（4—6—1）式的冗力方程。把它们写成矩阵的形式是：

$$[A]\{X\} + \{D\} = 0 \quad (4-6-2)$$

式中

$$\{X\} = \{M_1, B_1, M_2, B_2, \dots, M_{n-1}, B_{n-1}\} \quad (4-6-3)$$

是中间支承处的冗力分量。

$$\{D\} = \{\delta_{1,p}, \mu_{1,p}, \delta_{2,p}, \mu_{2,p}, \dots, \delta_{n-1,p}, \mu_{n-1,p}\} \quad (4-6-4)$$

是由于外荷载作用引起中间支承处的变形矢量。其中各系数的表达式从表（4—11）和表（4—12）中查得。

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1, n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2, n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1, n-1} \end{pmatrix} \quad (4-6-5)$$

表 4-10

变 量	表 达 式
$\delta_{M_{i-1}, i-1}^{M_{i-1}, i-1}$ $= \delta_{M_{i-1}, i-1}^{M_{i-1}, i-1}$	$\frac{R}{EI} \left\{ (1 + X(1 - \mu\eta)) \frac{\alpha / \sin\alpha - \cos\alpha}{2\sin\alpha} - X \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \right) - X\mu\eta^2 \left( \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{kR}{\operatorname{th}kl} \right) \right\}$
$\mu_{M_{i-1}, i-1}^{M_{i-1}, i-1}$ $= \mu_{M_{i-1}, i-1}^{M_{i-1}, i-1}$ $= \delta_{B_{i-1}, i-1}^{B_{i-1}, i-1}$	$\frac{1}{GK} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1 - \eta}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{\eta kR}{\operatorname{th}kl} \right)$
$\mu_{B_{i-1}, i-1}^{B_{i-1}, i-1}$ $= \mu_{B_{i-1}, i-1}^{B_{i-1}, i-1}$	$\frac{1}{IGK} \left( \frac{kl}{\mu \operatorname{th}kl} - 1 \right)$
$\delta_{M_{i-1}, i-1}^{M_{i-1}, i-1}$ $= \delta_{M_{i-1}, i-1}^{M_{i-1}, i-1}$	$\frac{R}{EI} \left\{ (1 + X(1 - \mu\eta)) \frac{1 - \alpha / \operatorname{tg}\alpha}{2\sin\alpha} - X \left( \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{l}{\alpha} \right) - X\mu\eta^2 \left( \frac{kR}{\operatorname{sh}kl} - \frac{1}{\sin\alpha} \right) \right\}$
$\mu_{M_{i-1}, i-1}^{M_{i-1}, i-1}$ $= \mu_{M_{i-1}, i-1}^{M_{i-1}, i-1}$ $= \delta_{B_{i-1}, i-1}^{B_{i-1}, i-1}$ $= \delta_{B_{i-1}, i-1}^{B_{i-1}, i-1}$	$\frac{1}{GK} \left( \frac{1 - \eta}{\sin\alpha} - \frac{1}{\alpha} + \frac{\eta kR}{\operatorname{sh}kl} \right)$
$\mu_{B_{i-1}, i-1}^{B_{i-1}, i-1}$ $= \mu_{B_{i-1}, i-1}^{B_{i-1}, i-1}$	$\frac{l}{IGK} \left( 1 - \frac{kl}{\mu \operatorname{sh}kl} \right)$

基本体系两端作用单位元力产生的变形系数

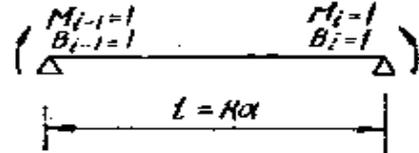
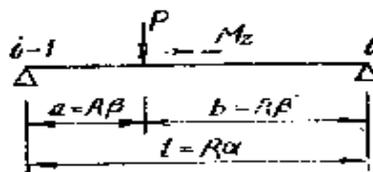


表 4-11

变 量	表 达 式
<p><math>\delta^P_{11}</math></p>	<p> <math display="block">\frac{R^2}{EI} \left\{ \left( P - \frac{M_z}{R} \right) (1 + X(1 - \mu\eta)) \frac{a \sin \beta - \beta \sin \alpha \cos \beta'}{2 \sin^2 \alpha} \right.</math> <math display="block">- X P \left( \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} - \frac{\beta'}{a} \right) + X \mu \eta \left[ \frac{M_z}{R} (1 - \eta) + \eta P \right]</math> <math display="block">\left. \left( \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} - \frac{\text{sh} kb}{\text{sh} kl} \right) \right\}</math> </p>
<p><math>\delta^M</math></p>	<p> <math display="block">\frac{R^2}{EI} \left\{ \left( P - \frac{M_z}{R} \right) (1 + X(1 - \mu\eta)) \frac{a \sin \beta' - \beta' \sin \alpha \cos \beta}{2 \sin^2 \alpha} \right.</math> <math display="block">- X P \left( \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} - \frac{\beta}{a} \right) + X \mu \eta \left[ \frac{M_z}{R} (1 - \eta) + \eta P \right]</math> <math display="block">\left. \left( \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} - \frac{\text{sh} ka}{\text{sh} kl} \right) \right\}</math> </p>
<p><math>\mu^P_{11}</math></p>	<p> <math display="block">\frac{1}{GK} \left\{ (M_z - PR) (1 - \eta) \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha} + PR \frac{\beta'}{a} - (M_z (1 - \eta) + \eta PR) \right.</math> <math display="block">\left. \frac{\text{sh} kb}{\text{sh} kl} \right\}</math> </p>
<p><math>\mu^M</math></p>	<p> <math display="block">\frac{1}{GK} \left\{ (M_z - PR) (1 - \eta) \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + PR \frac{\beta}{a} - (M_z (1 - \eta) + \eta PR) \right.</math> <math display="block">\left. \frac{\text{sh} ka}{\text{sh} kl} \right\}</math> </p>

基本体系上作用集中荷载  $P$  和  $M_z$  产生的荷载系数



是由于单位冗力引起的变形系数矩阵，其中的各元素可从表 4—10 中得到。

表 4—12

基本体系上作用均布荷载 $p$ 和 $m_c$ 产生的荷载系数	
$\delta_{P, i-1} = \delta_{P, i}$	$\frac{R^3}{EI_c} \left\{ \left( p - \frac{m_c}{k} \right) [1 + X(1 - \mu\eta)] \frac{\alpha - \sin\alpha}{2(1 + \cos\alpha)} \right.$ $- X p \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + X \mu \eta \left[ \frac{m_c}{R} (1 - \eta) + p \eta \right] \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{kR} \operatorname{th} \frac{kl}{2} \right) \left. \right\}$
$\mu_{P, i-1} = \mu_{P, i}$	$\frac{R}{GK} \left\{ (m_c - pR)(1 - \eta) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + pR \frac{\alpha}{2} - [m_c(1 - \eta) + \eta pR] \right.$ $\left. \frac{1}{kR} \operatorname{th} \frac{kl}{2} \right\}$

用矩阵代数方法求解方程组 (4—6—2)，就得到考虑翘曲作用时曲线连续梁各中间支承处的冗力矢量  $\{X\}$ 。由方程 (4—6—2) 解得：

$$\{X\} = [A]^{-1} \{D\} \quad (4-6-6)$$

求出了各中间支承处的冗力后，那么曲线连续梁中任一跨的截面内力和位移就可按曲线简支梁基本体系来分析，而基本体系的计算已在前面做了详细的讨论。

对于多跨曲线连续梁，方程 (4—6—2) 的未知数个数较多，不适合于手算。因此，宜编制程序用电子计算机计算。

### 第七节 算 例

在本章第五节中，我们推导了曲线连续梁纯扭转分析中的三弯矩方程，象直线连续梁一样，这是一种适用于手算的实用方法。下面我们以图 4—22 所示五跨变曲率曲线连续梁为例，说明该方法的应用。

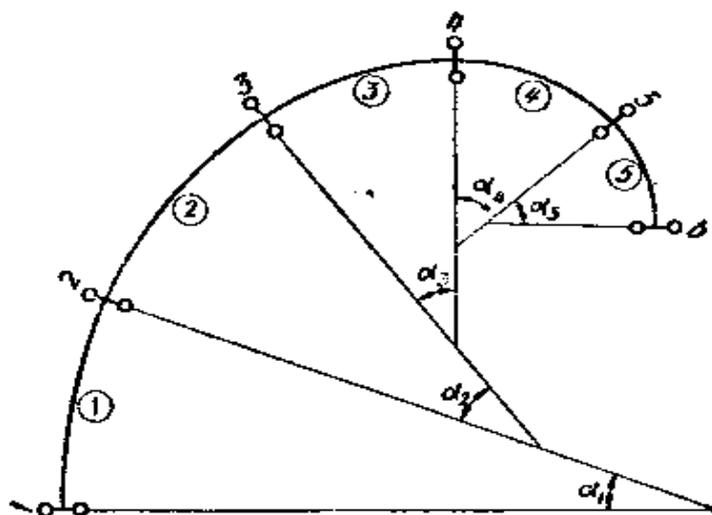


图 4—22 五跨变曲率曲线连续梁算例

已知  $E = 0.675 \times 10^6 \text{ kN/ft}^2$      $G = 0.28923 \times 10^6 \text{ kN/ft}^2$

$I_x = 126.73 \text{ ft}^4$                        $K = 237.71 \text{ ft}^4$

$l_1 = 91.12 \text{ ft}$      $l_2 = 113.26 \text{ ft}$      $l_3 = 127.29 \text{ ft}$

$l_4 = 111.68 \text{ ft}$      $l_5 = 98.63 \text{ ft}$      $R_1 = 355.97 \text{ ft}$

$R_2 = 282.15 \text{ ft}$      $R_3 = 191.93 \text{ ft}$      $R_4 = 127.13 \text{ ft}$

$R_5 = 86.94 \text{ ft}$      $X = EI_x / GK = 1.2442$      $\alpha_1 = l_1 / R_1 = 0.25598$

$\alpha_2 = l_2 / R_2 = 0.40142$      $\alpha_3 = l_3 / R_3 = 0.66321$

$\alpha_4 = l_4 / R_4 = 0.87847$      $\alpha_5 = l_5 / R_5 = 1.13446$

## 一、三弯矩方程：根据公式（4—5—1）

对本算例可列出三弯矩方程组为：

$$\left. \begin{aligned} \delta_{22}M_2 + \delta_{25}M_5 + \Delta_{2p} &= 0 \\ \delta_{32}M_2 + \delta_{33}M_3 + \delta_{34}M_4 + \Delta_{3p} &= 0 \\ \delta_{43}M_3 + \delta_{44}M_4 + \delta_{45}M_5 + \Delta_{4p} &= 0 \\ \delta_{54}M_4 + \delta_{55}M_5 + \Delta_{5p} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-7-1)$$

其中 $\delta_{ii}$  ( $i=2,3,4,5$ ) 代表单位冗力作用于第 $i$ 支点对该支承点产生的变形系数， $\delta_{ij}$  ( $j=3,4,5$ ) 代表单位冗力作用于第 $j$ 支点对 $i$ 支点对产生的变形系数， $\Delta_{ip}$  代表第 $i$ 支承点相邻两跨作用的外荷载对该支承点产生的荷载系数， $M_i$  则代表第 $i$ 支承点的冗力，即支点负弯矩

二、变形系数 $\delta_{ii}, \delta_{ij}$  ( $i=2,3,4,5 \quad j=3,4,5$ ) 的计算

查表4—8中“单位冗力产生的变形系数”栏目有：

$$\delta_{ii} = \frac{R}{EI_x} \left[ (1+X) \frac{\alpha - \sin\alpha \cos\alpha}{2 \sin^2\alpha} - X \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \right) \right] \quad (4-7-2)$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \frac{R}{EI_x} \left[ (1+X) \frac{\sin\alpha - \alpha \cos\alpha}{2 \sin^2\alpha} - X \left( \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \quad (4-7-3)$$

从（4—7—2）和（4—7—3）式可知，对于跨数比较多的连续梁，列表计算系数最为方便。

各跨中的 $\delta_{ii}$  列入表4—13计算：

表4—13

序号	$\alpha$ (弧度)	R (ft)	$(1+X) \frac{\alpha - \sin\alpha \cos\alpha}{2 \sin^2\alpha}$	$X \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \right)$	$EI_x \delta_{ii}$
1	0.25598	355.97	0.193194	1.1066385	30.81116
2	0.40142	282.15	0.306892	0.1682986	39.10413
3	0.66321	191.93	0.5271630	0.2834742	46.77119
4	0.87847	127.13	0.733076	0.3845675	44.30589
5	1.13446	86.94	1.0265334	0.5165472	44.33820

表 4—11 中的  $\delta_{ij}$  是表示各跨两端的变形系数，而连续梁中内支点处的变形系数应包括该支点相邻两跨的影响，因此

$$EI_x \delta_{22} = 30.81116 + 39.10413 = 69.91529$$

$$EI_x \delta_{33} = 39.10413 + 46.77119 = 85.87532$$

$$EI_x \delta_{44} = 46.77119 + 44.30589 = 91.07708$$

$$EI_x \delta_{55} = 44.30589 + 44.33820 = 88.64409$$

同样，可把各跨中的  $\delta_{ij}$  列入表 4—14 中计算：

表 4—14

$i$	$j$	$\alpha$ (弧度)	$R$ (ft)	$(1+X) \frac{\sin\alpha - \alpha \cos\alpha}{2\sin^2\alpha}$	$X \left( \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right)$	$EI_x \delta_{ij}$
1	2	0.25598	355.97	0.097232	0.053495	15.5691
2	3	0.40142	282.15	0.1559368	0.084833	20.06194
3	4	0.66321	191.93	0.2754054	0.1449278	25.04256
4	5	0.87847	127.13	0.3958073	0.2000153	24.89104
5	6	1.13446	86.94	0.5831304	0.276092	26.6939

### 三、荷载系数 $\Delta_{ip}$ 的计算

这里我们考虑沿全梁作用集度  $p=1$  的竖向均布荷载情况，查表 4—7 中“均布荷载  $p$  和  $m_i$  产生的变形系数”栏目，有：

$$\Delta_{ip} = \frac{R^3}{EI_x} \left[ \left( p - \frac{m_i}{R} \right) (1+X) \frac{\alpha - \sin\alpha}{2(1+\cos\alpha)} - X p \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \quad (4-7-4)$$

这里  $m_i = 0$  各跨中的  $\Delta_{ip}$  列入表 4—15 中计算

同变形系数  $\delta_{ij}$  的计算一样，各支点处的荷载系数  $\Delta_{ip}$  也应包括该支点相邻两跨的影响，故：

$$EI_x \Delta_{2p} = 32210.631 + 63790.867 = 96001.498$$

$$EI_x \Delta_{3p} = 63790.867 + 99182.177 = 162973.044$$

$$EI_x \Delta_{4p} = 99182.177 + 74722.949 = 173905.126$$

$$EI_x \Delta_{5p} = 74722.949 + 61157.401 = 135880.350$$

表 4—15

跨序号	$\alpha$ (弧度)	$R$ (ft)	$(1+X) \frac{\alpha - \sin \alpha}{2(1+\cos \alpha)}$	$Yp \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)$	$EI_{\Delta, p}$
1	0.25598	355.97	0.0015896	0.0008755	32210.631
2	0.40142	282.15	0.0062483	0.0034083	63790.867
3	0.66321	191.93	0.0298473	0.0158190	99182.177
4	0.87847	127.13	0.0744539	0.0380867	74722.949
5	11.3446	83.94	0.1799375	0.0868917	61157.401

#### 四、求解各支承处的冗力弯矩 $M_i$

我们把以上计算出的各支承点的变形系数  $\delta_{ii}, \delta_{ij}$  和荷载系数  $\Delta_{ip}$  代入式 (4—7—1) 有:

$$\begin{cases} 69.91529M_2 + 20.06194M_3 & + 96001.498 = 0 \\ 20.06194M_2 + 85.87532M_3 + 25.04256M_4 & + 162973.644 = 0 \\ & 25.04256M_3 + 91.07708M_4 + 24.89104M_5 + 173905.126 = 0 \\ & 24.89104M_4 + 88.64409M_5 + 135880.350 = 0 \end{cases}$$

解该方程组: 得到各支承处的冗力弯矩:

$$\begin{aligned} M_2 &= -997.95 & M_3 &= -1307.42 \\ M_4 &= -1225.02 & M_5 &= -1188.89 \end{aligned}$$

#### 五、计算各跨中任一截面上的内力与变位

求出了曲线连续梁中各支承处的冗力弯矩后, 就可把连续梁中各跨分别当作简支梁基本体系看待, 该基本体系上除了作用的外荷载外, 还有两端的冗力弯矩, 可用叠加法求出两者的共同作用。

这里, 我们以第三跨为例。取出的基本体系如图 4—23 a 所示, 它可由图 4—23 b 和图 4—23 c 两种荷载形式叠加而成。

图 4—23 b 和图 4—23 c 所示基本体系的有关计算公式可由表 4—5 查得, 由于这里  $m_i = 0$  因此该跨有关计算公式是:

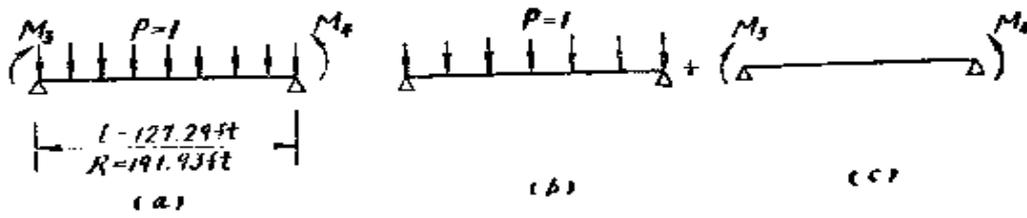


图 4-23 算例

$$M_2 = pR^3 \left( \frac{\sin \theta + \sin \theta'}{\sin \alpha_3} - 1 \right) + \frac{\sin \theta'}{\sin \alpha_3} M_3 + \frac{\sin \theta}{\sin \alpha_3} M_4$$

$$T = -pR^2 \left( \frac{\cos \theta - \cos \theta'}{\sin \alpha_3} R_3 + \frac{\theta - \theta'}{2\alpha_3} \right) + \left( \frac{\cos \theta'}{\sin \alpha_3} - \frac{1}{\alpha} \right) M_3$$

$$M_3 = \left( \frac{\cos \theta}{\sin \alpha_3} - \frac{1}{\alpha} \right) M_4$$

$$Q = pR^3 \left( \frac{\alpha_3}{2} - \theta \right) - (M_3 - M_4) / l_3$$

$$GK \phi = -pR^3 \left( \frac{\sin \theta + \sin \theta'}{\sin \alpha_3} - 1 \right) + \frac{pR^3}{2} \theta \theta'$$

$$+ \left( \frac{\theta}{\alpha_3} - \frac{\sin \theta}{\sin \alpha_3} \right) R M_4 + \left( \frac{\theta'}{\alpha_3} - \frac{\sin \theta'}{\sin \alpha_3} \right) R_3 M_3$$

$$EI_{zw} = pR^4 (1 + X) \left[ 1 + \frac{\theta \cos \theta + \theta' \cos \theta'}{2 \sin \alpha_3} - \left( 1 + \frac{\alpha_3}{2 \operatorname{tg} \alpha_3} \right) \right.$$

$$\left. \frac{\sin \theta + \sin \theta'}{\sin \alpha_3} \right] - X pR^4 \left( \frac{\sin \theta + \sin \theta'}{\sin \alpha_3} - 1 - \frac{\theta \theta'}{2} \right)$$

$$+ R^2 \left[ (1 + X) \frac{\alpha_3 \sin \theta' - \theta' \sin \alpha_3 \cos \theta}{2 \sin^2 \alpha_3} \right.$$

$$\left. - X \left( \frac{\sin \theta}{\sin \alpha_3} - \frac{\theta}{\alpha_3} \right) \right] M_4 + R^2 \left[ (1 + X) \right.$$

$$\left. \frac{\alpha_3 \sin \theta - \theta \sin \alpha_3 \cos \theta'}{2 \sin^2 \alpha_3} - X \left( \frac{\sin \theta'}{\sin \alpha_3} - \frac{\theta'}{\alpha_3} \right) \right] M_3$$

只要将所需计算点的曲线坐标 $\theta$ 或 $\theta'$ ( $=\alpha - \theta$ )代入以上各式,就能求出相应变量的值。如果计算点很多,可参照计算变形系数和荷载系数的办法,列表计算,这样比较直观,也省事。

### 参 考 文 献

1. Hiroshi Nakai and ChaiHong Yoo: 《Analysis and Design of Curved Steel Bridges》, New York, 1988.
2. C.P.Heins and R.A.Potoko: Torsional Stiffening of I-Girder Webs Journal of the Strurural Division, ASCE, Vol.105, NO.ST 8 Aug., 1979.
3. C.P.Heins and M.A.sahin: Natural Frequency of Curved Box Girder Bridges, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.105, NO.ST12 Dec., 1979.
4. A.C.Scordelis and p.k.Larsen: Structural Response of Curved RC Box-Girder Bridges, Journal of the Strutral Division, ASCE, Vol.103 No.ST 8, Aug., 1977.
5. HJ.R.Evas and M.E.Shanmuga: An Approximate Grillge Approach to the Analysis of Cellular Structures, Proc.Instn.Civ Engrs, Part, 2,1979,67,Har, 133-154.
6. C.P.Heins: Steel Curved I and Box Girder Design and Analysis, 《Analysis and Design of Bridges》, NATO ASI Series, 1984.
7. H.R. Evans: Simplified Methods for the Analysis and Design of Bridges of Cellular Cross-Section, 《Analysis and Design of Bridges》NATO ASI Series, 1984.
8. 黄剑源: 《薄壁结构的扭转分析》(上), 第八章, 中国铁道出版社, 1983年, 北京。
9. 张士铎: 《桥梁设计理论》, 人民交通出版社, 1984年, 北京。
10. 姚玲森编译: 平面曲线连续梁的实用计算, 《国外公路》, 1985年 第4期和第5期。
11. (日)小西一郎编, 戴振藩译: 《钢桥》第六分册, 铁道出版社, 1981年, 北京。

12. 张罗溪：薄壁曲线梁的计算，铁道部第三勘测设计院《科技通讯》，1987年第1期。
13. 杜国华，姜林：直接法计算弯桥的横向分布，《重庆交通学院学报》，1987年第1期。
14. 梁香珍，杜国华：曲线梁桥荷载横向分布，《重庆交通学院学报》，1986年第1期。
15. 姚玲森：曲线梁桥的实用计算方法，《土木工程学报》，1984年第8期。
16. (日)高岛春生著，张德礼译：《曲线梁桥》，中国建筑工业出版社，1975年北京。

## 第五章 考虑翘曲作用的 曲线格子梁理论

图 5—1 所示的曲线格子梁结构模型，为高次超静定。对于这样的曲线格子梁，前面的解析方法就不适用了，但可按格子梁理论来分析。格子梁理论的解法分为位移法和力法，这里只讨论位移法。

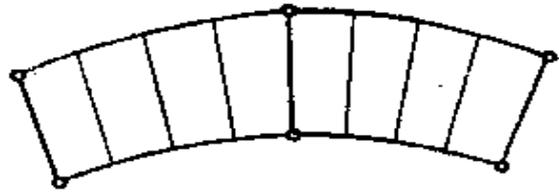


图 5—1 连续曲线格子梁的构架

### 第一节 考虑翘曲作用的曲线薄壁箱形梁 单元之刚度矩阵

曲线格子梁理论系于1965年由Lavelle和Boick首先提出。当时这方法主要应用于曲线工字型格子梁在竖向荷载作用下的受力分析。随后于1967年Sawko也应用这方法分析一座由箱形截面主梁组成的曲线正交格子梁桥。他们在推导曲线梁单元刚度矩阵时每个节点只考虑三个自由度，即扭角位移 $\phi$ ，弯曲角位移 $\delta$ 和竖直挠度 $W$ ，而不考虑与薄壁曲线梁有关的翘曲作用。这样，分析所得的结果难免与实际情况不尽符合。

由于薄壁曲线梁与翘曲有关的翘曲双力矩 $B$ 系与扭矩 $T$ ，弯矩 $M$ ，剪力 $Q$ 彼此互相藕合，因此，要分析这种类型梁桥的受力是比较困难的。这里我们以薄壁曲线箱形梁的翘曲扭转理论与有限元方法为基础，提出一种考虑翘曲作用的曲线格子梁理论，首先对薄壁曲线箱形梁翘曲位移函数 $f$ 的微分方程的初参数解代入相

应的边界条件解出与翘曲扭转有关的力素和变量，然后避开翘曲扭转位移方程中的弯扭耦合的处理麻烦，在单元上建立平衡方程，以柔度系数反演出刚度矩阵，推出一种新的薄壁曲线单元。

### 一、柔度矩阵

图 5—2 为一考虑翘曲作用的曲梁单元，现解除 1 端约束并代之以扭矩  $T_1$ ，弯矩  $M_{x1}$ ，竖向力  $Q_{y1}$  和翘曲双力矩  $B_1$ ，在此四力作用下，梁上任一截面产生的内力  $T$ ， $M_x$  和  $Q_y$  可用平衡关系求得：

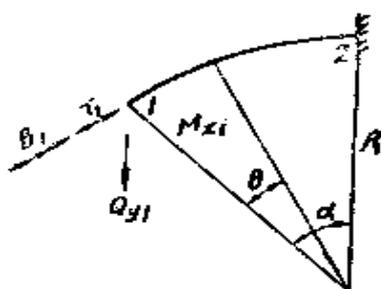


图 5—2 考虑翘曲作用的曲梁单元

$$\left. \begin{aligned} T &= -T_1 \cos \theta - M_{x1} \sin \theta - Q_{y1} R (1 - \cos \theta) \\ M_x &= T_1 \sin \theta - M_{x1} \cos \theta - Q_{y1} R \sin \theta \\ Q_y &= -Q_{y1} \end{aligned} \right\} \quad (5-1-1)$$

而翘曲双力矩  $B$  则需要利用第四章第二节中讨论的曲线箱形梁翘曲扭转微分方程的初参数解得到，

考虑翘曲作用时，图 5—2 所示曲梁单元的边界条件是：

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= -T_1 & B_0 &= -B_1 \\ \phi(z=l) &= 0 & f(z=l) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-1-2)$$

将  $M_x$  的表达式和边界条件  $f(z=l)=0$  代入方程 (4-2-9)，得

$$\begin{aligned} f_0 \operatorname{ch} k l + \frac{k}{\mu} \frac{\operatorname{sh} k l}{GK} B_1 - \frac{T_1}{GK} (1 - \operatorname{ch} k l) \\ + \frac{1}{GK} \int_0^\alpha (T_1 \sin \theta - M_{x1} \cos \theta - Q_{y1} R \sin \theta) \\ (1 - \operatorname{ch} k R (\alpha - \theta)) d(\alpha - \theta) = 0 \end{aligned}$$

引入积分：

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \operatorname{ch} k R (\alpha - \theta) \sin \theta d\theta &= \eta (\operatorname{ch} k l - \cos \alpha) \\ \int_0^\alpha \operatorname{ch} k R (\alpha - \theta) \cos \theta d\theta &= \eta (\sin \alpha + k R \operatorname{sh} k l) \end{aligned}$$

则可以把上式写成

$$\begin{aligned}
 GKchklf_0 &= -\frac{k}{\mu}shklB_1 + [(1-chkl) + (1-\cos\alpha) \\
 &\quad + \eta(\cos\alpha - chkl)]T_1 + [-\sin\alpha \\
 &\quad + \eta(\sin\alpha + kRshkl)]M_{x_1} + [(1-\cos\alpha) \\
 &\quad + \eta(chkl - \cos\alpha)]RQ_{y_1} \\
 &= [2 - (1-\eta)\cos\alpha - (1+\eta)chkl]T_1 \\
 &\quad - \frac{k}{\mu}shklB_1 + [\eta kRshkl - (1-\eta)\sin\alpha] \\
 &\quad M_{x_1} + [1 - (1+\eta)\cos\alpha + \eta chkl]RQ_{y_1} \\
 &\hspace{15em} (5-1-3)
 \end{aligned}$$

再把上式的 $f_0$ 和 $M_{x_1}$ 的表达式代入方程(4-2-9), 则可以得到梁中任一截面的翘曲双力矩 $B$ :

$$\begin{aligned}
 B &= -\frac{\mu}{k}GKf_0shkz + B_0chkz + \frac{\mu}{k}T_0shkz \\
 &\quad + \frac{\mu}{k}\int_0^{\theta} (T_1\sin\lambda - M_{x_1}\cos\lambda - Q_{y_1}R\sin\lambda)shkR \\
 &\quad (\theta - \lambda)d(\theta - \lambda)
 \end{aligned}$$

引入积分:

$$\int_0^{\theta} shkR(\theta - \lambda)\sin\lambda d(\theta - \lambda) = \eta(kR\sin\theta - shkz)$$

$$\int_0^{\theta} shkR(\theta - \lambda)\cos\lambda d(\theta - \lambda) = \eta kR(\cos\theta - chkz)$$

则

$$\begin{aligned}
 B &= -\{[2 - (1-\eta)\cos\alpha - (1+\eta)chkl]\frac{\mu shkz}{kchkl} + \frac{\mu}{k}shkl \\
 &\quad + \frac{\mu\eta}{k}(kR\sin\theta - shkz)\}T_1 \\
 &\quad - \{[\eta kRshkl - (1-\eta)\sin\alpha]\frac{\mu shkz}{kchkl} + \frac{\mu}{k}\eta kR(\cos\theta \\
 &\quad - chkz)\}M_{x_1} - \{[1 - (1+\eta)\cos\alpha + \eta chkl]\frac{\mu shkz}{kchkl}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\mu\eta}{k} (kR \sin\theta - \operatorname{sh}kz) \} RQ_{v1} + \left( \frac{\operatorname{sh}kl}{\operatorname{ch}kl} \operatorname{sh}kz \right. \\
 & \left. - \operatorname{ch}kz \right) B_1 \\
 = & \frac{\mu}{k} \left[ \eta k R \sin\theta - \frac{2\operatorname{sh}kz}{\operatorname{ch}kl} + \frac{(1-\eta)\cos\alpha \operatorname{sh}kz}{\operatorname{ch}kl} \right] T_1 \\
 & + \frac{\mu}{k} \left[ \frac{(1-\eta)\sin\alpha \operatorname{sh}kz}{\operatorname{ch}kl} - \eta k R \left( \cos\theta - \frac{\operatorname{ch}kz'}{\operatorname{ch}kl} \right) \right] \\
 & M_{z1} + \frac{\mu}{k} \left[ \frac{(1+\eta)\cos\alpha \operatorname{sh}kz}{\operatorname{ch}kl} - \frac{\operatorname{sh}kz}{\operatorname{ch}kl} - \eta k R \sin\theta \right] \\
 & RQ_{v1} - \frac{\operatorname{ch}kz'}{\operatorname{ch}kl} B_1 \quad (5-1-4)
 \end{aligned}$$

如果不计剪切变形，则存储在曲梁单元内的应变能可表示为：

$$U = \int_0^l \frac{T^2 ds}{2GK} + \int_0^l \frac{M_z^2 ds}{2EI_z} + \int_0^l \frac{B^2 ds}{EI_{z'}} \quad (5-1-5)$$

根据卡氏定理，与节点力对应的节点位移分量，即扭转角位移 $\phi_1$ ，弯曲角位移 $\delta_1$ ，竖向挠度 $W_1$ 和翘曲位移 $\mu_1$ 可分别用下列各式求得：

$$\begin{aligned}
 \phi_1 = \frac{\partial U}{\partial T_1} = & \frac{R}{EI_z} \int_0^\alpha M_z \frac{\partial M_z}{\partial T_1} d\theta + \frac{R}{GK} \int_0^\alpha T \frac{\partial T}{\partial T_1} d\theta \\
 & + \frac{R}{EI_{z'}} \int_0^\alpha B \frac{\partial B}{\partial T_1} d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta_1 = \frac{\partial U}{\partial M_{z1}} = & \frac{R}{EI_z} \int_0^\alpha M_z \frac{\partial M_z}{\partial M_{z1}} d\theta + \frac{R}{GK} \int_0^\alpha T \frac{\partial T}{\partial M_{z1}} d\theta \\
 & + \frac{R}{EI_{z'}} \int_0^\alpha B \frac{\partial B}{\partial M_{z1}} d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_1 = \frac{\partial U}{\partial Q_{v1}} = & \frac{R}{EI_z} \int_0^\alpha M_z \frac{\partial M_z}{\partial Q_{v1}} d\theta + \frac{R}{GK} \int_0^\alpha T \frac{\partial T}{\partial Q_{v1}} \\
 & d\theta + \frac{R}{EI_{z'}} \int_0^\alpha B \frac{\partial B}{\partial Q_{v1}} d\theta
 \end{aligned}$$

$$\mu_1 = \frac{\partial U}{\partial B_1} = \frac{R}{EI_z} \int_0^\alpha M_z \frac{\partial M_z}{\partial B_1} d\theta + \frac{R}{GK} \int_0^\alpha T \frac{\partial T}{\partial B_1} d\theta$$

$$+ \frac{R}{EI_{\omega}} \int_0^{\alpha} B \frac{\partial B}{\partial B_1} d\theta \quad (5-1-6)$$

把 (5-1-1) 和 (5-1-4) 内力表达式分别代入 (5-1-6) 中各式, 进行积分并整理后得到节点位移与节点力的关系是:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= f_{11}T_1 + f_{12}M_{x1} + f_{13}Q_{v1} + f_{14}B_1 \\ \delta_1 &= f_{21}T_1 + f_{22}M_{x1} + f_{23}Q_{v1} + f_{24}B_1 \\ W_1 &= f_{31}T_1 + f_{32}M_{x1} + f_{33}Q_{v1} + f_{34}B_1 \\ \mu_1 &= f_{41}T_1 + f_{42}M_{x1} + f_{43}Q_{v1} + f_{44}B_1 \end{aligned} \quad (5-1-7)$$

其中  $f_{ij}$  ( $i=1,2,3,4; j=1,2,3,4$ ) 是柔度系数。上式可用矩阵形式表示为

$$\{d_1\} = [F_1] \{R_1\} \quad (5-1-8)$$

式中

$$\{d_1\} = [\phi_1 \delta_1 W_1 \mu_1]^T \quad (5-1-9)$$

代表曲梁单元 1 端的节点位移向量。

$$\{R_1\} = [T_1 M_{x1} Q_{v1} B_1]^T \quad (5-1-10)$$

代表曲梁单元 1 端的节点力向量。

$$[F_1] = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ & & f_{33} & f_{34} \\ & & & f_{44} \end{pmatrix} \quad (5-1-11)$$

代表曲梁单元 1 端的柔度矩阵。各柔度系数的表达式为:

$$f_{11} = \frac{R}{GK} C_0 + \frac{R}{EI_x} C_8 + \frac{\mu^2 R}{k^2 EI_{\omega}} \left\{ \left[ \frac{2 - (1-\eta) \cos \alpha}{\operatorname{ch} kl} \right]^2 C_1 - \eta k R \frac{2 - (1-\eta) \cos \alpha}{\operatorname{ch} kl} C_4 + \eta^2 k^2 R^2 C_8 \right\}$$

$$f_{22} = \frac{R}{GK} C_8 + \frac{R}{EI_x} C_0 + \frac{\mu^2 R}{k^2 EI_{\omega}}$$

$$\left\{ \left[ \frac{(\eta-1) \sin \alpha + \eta k R \operatorname{sh} kl}{\operatorname{ch} kl} \right]^2 C_1 + \eta^2 k^2 R^2 (C_0 + C_2) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(\eta - 1) \sin \alpha + \eta k R \operatorname{sh} k l}{\operatorname{ch} k l} 2 \eta k R (C_5 - C_3) \\
 & - 2 \eta^2 k^2 R^2 C_7 \} \\
 f_{33} = & \frac{R^2}{GK} (\alpha - 2 \sin \alpha + C_9) + \frac{R^2}{EI_x} C_8 + \frac{R \alpha}{GA_v} + \frac{\mu^2 R^2}{k^2 EI_{\infty}} \\
 & \left\{ \left[ \frac{1 - (1 - \eta) \cos \alpha}{\operatorname{ch} k l} \right]^2 C_1 - 2 \eta k R \frac{1 - (1 - \eta) \cos \alpha}{\operatorname{ch} k l} C_4 \right. \\
 & \left. + \eta^2 k^2 R^2 C_8 \right\} \\
 f_{44} = & \frac{R}{EI_{\infty}} (\operatorname{th}^2 k l C_1 - 2 C_3 \operatorname{th} k l + C_2) \\
 f_{12} = & \frac{R}{GK} C_{10} + \frac{R}{EI_x} C_{10} + \frac{\mu^2 R}{k^2 EI_{\infty}} \\
 & \left\{ \frac{(\eta - 1) \sin \alpha + \eta k R \operatorname{sh} k l}{\operatorname{ch} k l} \cdot \frac{2 - (1 - \eta) \cos \alpha}{\operatorname{ch} k l} C_1 \right. \\
 & - \frac{(\eta - 1) \sin \alpha + \eta k R \operatorname{sh} k l}{\operatorname{ch} k l} \eta k R C_4 \\
 & \left. + \frac{2 - (1 - \eta) \cos \alpha}{\operatorname{ch} k l} \eta k R (C_5 - C_3) - \eta^2 k^2 R^2 \right. \\
 & \left. (C_{10} - C_8) \right\} \\
 f_{13} = & \frac{R^2}{GK} (\sin \alpha - C_9) - \frac{R^2}{EI_x} C_8 - \frac{\mu^2 R^2}{k^2 EI_{\infty}} \\
 & \left\{ \frac{[2 - (1 - \eta) \cos \alpha][1 - (1 - \eta) \cos \alpha]}{\operatorname{ch}^2 k l} C_1 \right. \\
 & \left. - \eta k R \frac{3 - 2(1 - \eta) \cos \alpha}{\operatorname{ch} k l} C_4 + \eta^2 k^2 R^2 C_8 \right\} \\
 f_{14} = & - \frac{\mu R}{k EI_{\infty}} \left\{ \frac{\operatorname{th} k l [2 - (1 - \eta) \cos \alpha]}{\operatorname{ch} k l} C_1 + \eta k R C_4 \right. \\
 & \left. - \frac{2 - (1 - \eta) \cos \alpha}{\operatorname{ch} k l} C_3 + \eta k R C_8 \right\} \\
 f_{23} = & \frac{R^2}{GK} (1 - \cos \alpha + C_{10}) + \frac{R^2}{EI_x} C_{10} + \frac{\mu^2 R^2}{k^2 EI_{\infty}} \\
 & \left\{ \frac{[1 - (1 - \eta) \cos \alpha][(\eta - 1) \sin \alpha + \eta k R \operatorname{sh} k l]}{\operatorname{ch}^2 k l} C_1 \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \eta k R \frac{1 - (1 - \eta) \cos \alpha}{\operatorname{ch} k l} (C_5 - C_3) \\
 & - \frac{(\eta - 1) \sin \alpha + \eta k R \operatorname{sh} k l}{\operatorname{ch} k l} \eta k R C_4 - \eta^2 k^2 R^2 \\
 & (C_{10} - C_6) \} \\
 f_{24} = & - \frac{\mu R}{k E I_{\omega \omega}} \left\{ \frac{\operatorname{th} k l [(\eta - 1) \sin \alpha + \eta k R \operatorname{sh} k l]}{\operatorname{ch} k l} C_1 \right. \\
 & + \eta k R \operatorname{th} k l C_6 - \frac{(\eta - 1) \sin \alpha + \eta k R \operatorname{sh} k l}{\operatorname{ch} k l} C_3 \\
 & \left. - \eta k R (C_7 - C_2) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{34} = & \frac{\mu R^2}{k E I_{\omega \omega}} \left\{ \frac{\operatorname{th} k l [1 - (1 + \eta) \cos \alpha]}{\operatorname{ch} k l} C_1 - \eta k R C_4 \right. \\
 & \left. - \frac{1 - (1 - \eta) \cos \alpha}{\operatorname{ch} k l} C_3 + \eta k R C_6 \right\}
 \end{aligned}$$

$$C_1 = \int_0^{\alpha} \operatorname{sh} 2kR \theta d\theta = \frac{\operatorname{sh} 2kR}{4kR} - \frac{\alpha}{2}$$

$$C_2 = \int_0^{\alpha} \operatorname{ch} 2kR \theta d\theta = \frac{\operatorname{sh} 2kl}{4kR} + \frac{\alpha}{2}$$

$$C_3 = \int_0^{\alpha} \operatorname{sh} kR \theta \operatorname{ch} kR \theta d\theta = \frac{(\operatorname{ch} 2kl - 1)}{4kR}$$

$$\begin{aligned}
 C_4 = \int_0^{\alpha} \operatorname{sh} kR \theta \sin \theta d\theta = & \eta (kR \operatorname{ch} k l \sin \alpha \\
 & - \operatorname{sh} k l \cos \alpha)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_5 = \int_0^{\alpha} \operatorname{sh} kR \theta \cos \theta d\theta = & \eta (kR \operatorname{ch} k l \cos \alpha \\
 & - kR + \operatorname{sh} k l \sin \alpha)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_6 = \int_0^{\alpha} \operatorname{ch} kR \theta \sin \theta d\theta = & \eta (kR \operatorname{sh} k l \sin \alpha \\
 & - \operatorname{ch} k l \cos \alpha + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_7 = \int_0^{\alpha} \operatorname{ch} kR \theta \cos \theta d\theta = & \eta (kR \operatorname{sh} k l \cos \alpha \\
 & + \operatorname{ch} k l \sin \alpha)
 \end{aligned}$$

$$C_8 = \int_0^\alpha \sin^2 \theta d\theta = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\alpha$$

$$C_9 = \int_0^\alpha \cos^2 \theta d\theta = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\alpha$$

$$C_{10} = \int_0^\alpha \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2\alpha$$

## 二、刚度矩阵

解方程 (5-1-8), 就得到单元 1 端节点力与节点位移的关系为

$$\{R_1\} = [K_{11}]\{d_1\} \quad (5-1-12)$$

式中  $[K_{11}] = [F_1]^{-1}$  是单元 1 端的刚度矩阵。

令方程 (5-1-1) 和 (5-1-4) 中的  $\theta = \alpha$ , 则得到单元两端节点力的关系式

$$T_2 = -T_1 \cos \alpha - M_{x1} \sin \alpha - Q_{v1} R (1 - \cos \alpha)$$

$$M_{x2} = T_1 \sin \alpha - M_{x1} \cos \alpha - Q_{v1} R \sin \alpha$$

$$Q_{v2} = -Q_{v1} \quad (5-1-13)$$

$$B_2 = \frac{\mu}{k} \left[ \eta k R \sin \alpha - \frac{2 \operatorname{sh} kl}{\operatorname{ch} kl} + (1 - \eta) \cos \alpha \operatorname{th} kl \right] T_1$$

$$+ \frac{\mu}{k} \left[ (1 - \eta) \sin \alpha \operatorname{th} kl - \eta k R \left( \cos \alpha - \frac{1}{\operatorname{ch} kl} \right) \right]$$

$$M_{x1} + \frac{\mu}{k} [(1 + \eta) \cos \alpha \operatorname{th} kl - \operatorname{th} kl - \eta k R \sin \alpha]$$

$$R Q_{v1} - \frac{B_1}{\operatorname{ch} kl}$$

将上式写成矩阵形式是:

$$\{R_2\} = [E_{12}] \{R_1\} \quad (5-1-14)$$

式中

$$\{R_2\} = [T_2 M_{x2} Q_{v2} B_2]^T \quad (5-1-15)$$

是单元右端的节点力向量。

$$[E_{12}] = \begin{pmatrix} -\cos\alpha - \sin\alpha - R(1 - \cos\alpha) & 0 \\ \sin\alpha - \cos\alpha & R \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad (5-1-16)$$

是曲梁单元两端节点力的平衡矩阵。其中

$$a_1 = \frac{\mu}{k} \left[ \eta k R \sin\alpha - \frac{2 \operatorname{sh} kl}{\operatorname{ch} kl} + (1 - \eta) \cos\alpha \operatorname{th} kl \right]$$

$$a_2 = \frac{\mu}{k} \left[ (1 - \eta) \sin\alpha \operatorname{th} kl - \eta k R \left( \cos\alpha - \frac{1}{\operatorname{ch} kl} \right) \right]$$

$$a_3 = \frac{\mu}{k} [(1 + \eta) \cos\alpha \operatorname{th} kl - \operatorname{th} kl - \eta k R \sin\alpha] R$$

$$a_4 = -\frac{1}{\operatorname{ch} kl}$$

单元的完全刚度矩阵可写成下面的分块矩阵形式

$$K_n = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \quad (5-1-17)$$

其中子矩阵中 $[K_{11}]$ 已由前面柔度矩阵求逆得到。根据刚度柔度的物理意义，其余的子矩阵可利用与(5-1-14)式的相似关系求得，即

$$[K_{21}] = [E_{12}] [K_{11}] \quad (5-1-18)$$

$$[K_{12}] = [K_{21}]^T = [K_{11}] [E_{12}]^T \quad (5-1-19)$$

$$\begin{aligned} [K_{22}] &= [E_{12}] [K_{12}] \\ &= [E_{12}] [K_{11}] [E_{12}]^T \quad (5-1-20) \end{aligned}$$

## 第二节 考虑翘曲作用的直线薄壁箱形梁

### 单元之刚度矩阵

在连续梁桥中，往往出现曲、直混合的情况，因此，有必要推出考虑翘曲作用的直线薄壁箱形梁单元的刚度矩阵，才能使曲子格子梁理论的适用性更广泛。

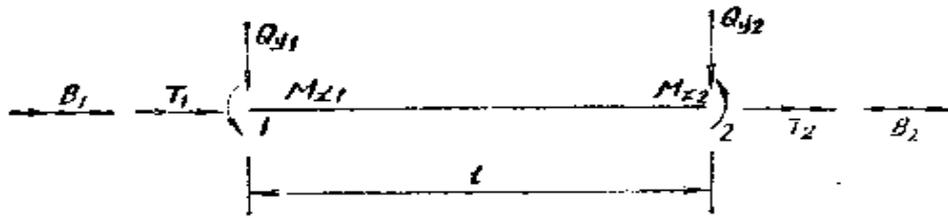


图 5—3 考虑翘曲作用的直梁单元

图 5—3 所示为考虑翘曲作用的薄壁直梁单元，其节点力的性质和序号与前面的曲梁单元相同。由于直梁单元中不存在弯扭藕合，因此，其单元刚度矩阵可按弯曲作用与扭转作用分别求得后再组合。弯曲作用部分的刚度系数推导同一般结构力学的方法。这里只推导扭转作用所对应的刚度系数。

第四章第二节中推导的用初参数表式的曲线箱形梁翘曲扭转微分方程的齐次解（4—2—8）至（4—2—11）四个式子对直线箱形梁的翘曲扭转分析仍然适用。根据刚度系数的物理意义，我们可以直接推出考虑翘曲作用的直线箱形梁单元的刚度系数。

1. 当 1 端产生单位扭转角位移（即  $\phi_0 = 1$ ，所对应的单元自由度号为 1）时的刚度系数：

此时的边界条件是

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 1 & f_0 &= 0 \\ \phi(z=l) &= 0 & f(z=l) &= 0 \end{aligned} \quad (5-2-1)$$

将  $\phi(z=l) = 0$  代入方程（4—2—8）的齐次解部分得

$$(kl - \mu \operatorname{sh} kl) T_0 + k(1 - \operatorname{ch} kl) B_0 = -kGK \quad (5-2-2)$$

将  $f(z=l) = 0$  代入方程（4—2—9）的齐次解部分得

$$\mu(1 - \operatorname{ch} kl) T_0 + k \operatorname{sh} kl B_0 = 0 \quad (5-2-3)$$

联立求解（5—2—2）和（5—2—3）两式，得

$$\begin{aligned} T_0 &= -GK \beta k \operatorname{sh} kl / D \\ B_0 &= -GK(1 - \operatorname{ch} kl) / D \end{aligned}$$

式中

$$D = \beta kl \operatorname{sh} kl + 2(1 - \operatorname{ch} kl)$$

將所解得  $T_0$  和  $B_0$  分別代入 (4-2-10) 和 (4-2-11) 兩式的齊次解部分，得到翹曲雙方矩  $B$  和扭矩  $T$  的表达式：

$$T = T_0 = -GK \beta k \operatorname{sh} kl / D \quad (5-2-4)$$

$$B = -GK(1 - \operatorname{ch} kl) \operatorname{ch} kz / D - GK \operatorname{sh} kl \operatorname{sh} kz / D \quad (5-2-5)$$

則所對應的剛度系数是

$$\left. \begin{aligned} k_{11} &= -T(z=0) = GK \beta k \operatorname{sh} kl / D \\ k_{41} &= -B(z=0) = GK(1 - \operatorname{ch} kl) / D \\ k_{12} &= T(z=l) = k_{11} \\ k_{42} &= B(z=l) = k_{41} \end{aligned} \right\} \quad (5-2-6)$$

2. 當 1 端產生單位翹曲位移（即  $f_0=1$ ，所對應的單元節點自由度序號為 4）時的剛度系数：

此時的邊界條件是：

$$\left. \begin{aligned} \phi_0 &= 0 & f_0 &= 1 \\ \phi(z=l) &= 0 & f(z=l) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-2-7)$$

同前一樣，根據以上條件可求得另外兩個初參數  $T_0$  和  $B_0$  是：

$$T_0 = -GK(\operatorname{ch} kl - 1) / D$$

$$B_0 = GK(kl \operatorname{ch} kl - \mu \operatorname{sh} kl) / kD$$

則翹曲雙方矩  $B$  和扭矩  $T$  的表达式是：

$$T = -GK(\operatorname{ch} kl - 1) / D \quad (5-2-8)$$

$$\begin{aligned} B &= -\frac{\mu}{k} GK \operatorname{sh} kz + \frac{GK}{kD} (kl \operatorname{ch} kl - \mu \operatorname{sh} kl) \operatorname{ch} kz \\ &\quad + \frac{\mu}{kD} GK(1 - \operatorname{ch} kl) \operatorname{sh} kz \end{aligned} \quad (5-2-9)$$

此時所對應的剛度系数為：

$$k_{44} = B(z=0) = GK(kl \operatorname{ch} kl - \mu \operatorname{sh} kl) / kD$$

$$k_{14} = -T(z=0) = GK(\operatorname{ch} kl - 1) / D$$

$$k_{24} = T(z=l) = -k_{14}$$

$$k_{34} = -B(z=l) = GK(\mu \operatorname{sh} kl - kl) / kD \quad (5-2-10)$$

表 5--1

考虑翘曲位移影响的直线薄壁箱形梁单元刚度矩阵

$\frac{\beta_k G K_{shkl}}{D}$	0	0	$\frac{GK(chkl-1)}{D}$	$-\frac{\beta_k G K_{shkl}}{D}$	$\frac{GK(chkl-1)}{D}$
0	$\frac{4EI_z}{I} - \frac{6EI_z}{I^3}$	0	0	0	$\frac{2EI_z}{I} - \frac{6EI_z}{I^3}$
0	$-\frac{6EI_z}{I^3}$	$\frac{12EI_z}{I^3}$	0	0	$-\frac{6EI_z}{I^3} - \frac{12EI_z}{I^3}$
$\frac{GK(chkl-1)}{D}$	0	0	$\frac{GK(\beta_k chkl - shkl)}{\beta_k D}$	$-\frac{GK(chkl-1)}{D}$	$\frac{GK(shkl - \beta_k l)}{\beta_k D}$
$-\frac{\beta_k G K_{shkl}}{D}$	0	0	$-\frac{GK(chkl-1)}{D}$	$\frac{\beta_k G K_{shkl}}{D}$	$-\frac{GK(chkl-1)}{D}$
0	$\frac{2EI_z}{I} - \frac{6EI_z}{I^3}$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{I} - \frac{6EI_z}{I^3}$
0	$\frac{6EI_z}{I^3} - \frac{12EI_z}{I^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{I^3} - \frac{12EI_z}{I^3}$
$\frac{GK(chkl-1)}{D}$	0	0	$\frac{GK(shkl - \beta_k l)}{\beta_k D}$	$-\frac{GK(chkl-1)}{D}$	$\frac{GK(\beta_k chkl - shkl)}{\beta_k D}$

其中:  $D = \beta_k l / shkl + 2(1 - chkl)$

同理，可求得单元右端产生单位位移的各刚度系数。考虑翘曲作用的直线箱形梁单元的刚度系数见表 5—1。

### 参 考 文 献

1. Huang Jianyun, Zhang Luoxi and Firmage D.A, A Refined Curved Grillage Theory and Its Application to the Analysis of a Curved Skew Bridge in Qingdao, Proceedings of International Symposium on Geomechanics, Bridges and Structures, Lanzhou, China, Sept, 1987, 165-173.
2. W.N.AL-Rifaie and H.R.Evans, An Approximate Method for the Analysis of Box Girder Bridges that are Curved in Plan, IABSE Proceedings, P-21/79.
3. P.J.Brennan and J.A.Mandel, Multiple Configuration Curved Bridge Model Studies, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.105, No.ST5, May, 1979.
4. F.H.Lavell and J.S.Boick, Programe to Analysis Curved Girder Bridges, Engineering Bulletin No. 8, University of Rhode Island, 1965.
5. F.H.Lavell, Analysis of Curved Steel Girder Bridges, American Institution of Steel Construction, April, 1966.
6. F.H.Lavell and R.A.Grieg and H.R.Wemmer, CUGARI, Curved Girder Analysis Revision 1, Engineering Bulleting No.4, University of Rhode Island, Sept. 1971.
7. F.Sawko, Computer Analysis of Curved Grillages in Plan, Iternational Association for Bridge and Structural Engineering, Volume 27, 1967.
8. M.E.Mohsion and E.A.Sadek, Beam Analog for Plate Elements, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.102, No.ST1, Jan., 1976.

9. P. Waldron, Elastic Analysis of Curved Thin-Walled Girders Including the Effects of Warping Restraint, Engineering Structures, Vol.7, April 1985.
10. S.T. Wasti and A.C. Scordelis, Comparative Structural Behavior of Straight, Curved and Skew Reinforced Concrete Box Girder Bridge Models, 《Analysis and Design of Bridges》, NATO ASI Series, 1984.
11. 《英》E.C. 汉勃利著, 郭文辉译: 《桥梁上部构造性能》, 人民交通出版社, 1982年, 北京。
12. 何福保: 薄壁曲杆的有限元法, 《固体力学学报》, 1981年第2期。
13. 姚伟达, 张慧娟: 闭口薄壁曲杆的弯扭分析, 《上海力学》, 1985年第1期。
14. 张叔辉: 曲桥分析的薄壁箱形单元, 《土木工程学报》, 1984年第1期。
15. 张罗溪: 《曲线斜交桥格子梁桥的翘曲扭转分析与应用》, 兰州铁道学院硕士学位论文, 1985年6月。

## 第六章 预应力混凝土曲线箱形 梁桥的空间分析

在现代桥梁工程中已广泛采用预应力混凝土结构。曲线桥梁在预应力荷载作用下则是空间受力，目前还没有比较成熟的计算方法。这里我们提出空间曲梁的计算理论，并且推导出空间曲梁在任意的空间荷载作用下的单元等效节点力，从而使得空间曲梁的计算变得同空间直梁的计算一样方便。这种方法很好地解决了曲线桥中预应力的空间计算问题。

### 第一节 空间曲梁单元的刚度矩阵

在混凝土箱形中，截面的翘曲应力所占截面正应力的比例很小。而且由前一章的分析中知道，考虑翘曲作用时曲梁单元的柔度系数是很复杂的。因此，这里我们略去截面的翘曲影响。由于箱形截面的剪心和形心一般都不在同一点，在预应力荷载作用下，它将使曲梁在曲率平面内的力与曲率平面外的力产生耦合作用。在本章推出的空间曲梁单元刚度矩阵中将考虑这种耦合作用。

#### 一、柔度矩阵

图 6—1 为一空间曲线箱形梁单元。假设箱形截面有一对称轴  $y$ ，截面剪心和形心在  $y$  轴上的距离为  $y_0$ 。单元左端的局部坐标系以截面形心  $C$  点为原点， $X$  轴指向曲梁圆心， $y$  轴和  $z$  轴与  $x$  轴符合右手螺旋法则，如图 6—1。单元左端的节点力有通过截面形心的轴力  $N_1$ ，绕形心轴作用的弯矩  $M_{x1}$ 、 $M_{y1}$  和通过截面剪心的剪力  $S_{x1}$ 、 $S_{y1}$  和绕剪心轴作用的扭矩  $T_1$ 。在单元左端节点力

作用下，曲梁中任一截面处的截面内力可用平衡法求得，

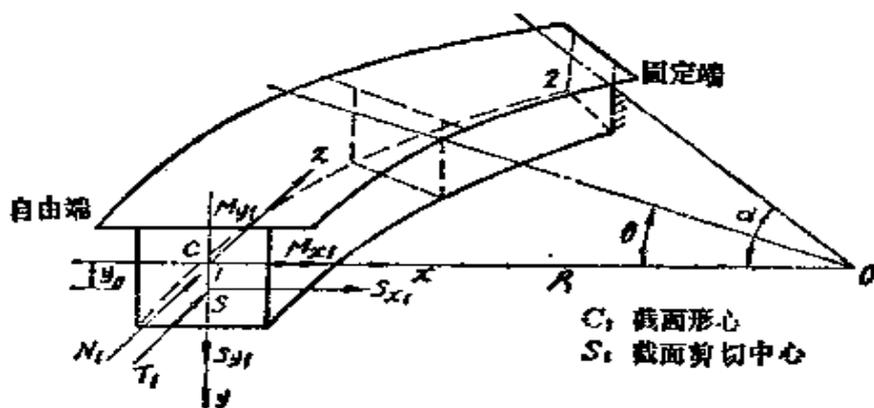


图 6-1 空间曲梁单元

$$\begin{aligned}
 N &= -N_1 \cos \theta - S_{x1} \sin \theta \\
 S_x &= N_1 \sin \theta - S_{x1} \cos \theta \\
 M_y &= -N_1 R (1 - \cos \theta) + S_{x1} R \sin \theta - M_{y1} \\
 T &= -T_1 \cos \theta - (M_{x1} - N_1 y_0) \sin \theta - S_{y1} R (1 - \cos \theta) \\
 M_x &= (T_1 - S_{y1} y_0) \sin \theta - M_{x1} \cos \theta - S_{y1} R \sin \theta \\
 S_y &= -S_{y1}
 \end{aligned}
 \tag{6-1-1}$$

考虑剪切变形时，单元内的应变能可表达为：

$$U = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \left( \frac{N^2}{EA_x} + \frac{T^2}{GK} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{S_x^2}{GA_{sx}} + \frac{S_y^2}{GA_{sy}} \right) R d\theta
 \tag{6-1-2}$$

根据卡氏定理，与节点力对应的节点位移分量可用下列各式求得：

$$\left. \begin{aligned}
 u_1 &= \frac{\partial U}{\partial N_1} & v_1 &= \frac{\partial U}{\partial S_{x1}} & \delta_{v1} &= \frac{\partial U}{\partial M_{y1}} \\
 \phi_1 &= \frac{\partial U}{\partial T_1} & \delta_{x1} &= \frac{\partial U}{\partial M_{x1}} & w_1 &= \frac{\partial U}{\partial S_{y1}}
 \end{aligned} \right\}
 \tag{6-1-3}$$

利用同 § 5.1 节类似的步骤，可求得空间曲梁单元 1 端节点力与节点位移的关系，写成矩阵形式是

$$\{d_i\} = [F_i] \{R_i\} \quad (6-1-4)$$

式中  $\{d_i\} = [u_1 \ v_1 \ \delta_{v1} \ \phi_1 \ \delta_{x1} \ w_1]^T$  (6-1-5)

是单元左端的节点位移向量。

$$\{R_i\} = [N_1 \ S_{x1} \ M_{v1} \ T_1 \ M_{x1} \ S_{v1}]^T \quad (6-1-6)$$

是单元左端的节点力向量。

$$[F_i] = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} \\ & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} \\ & & f_{33} & f_{34} & f_{35} & f_{36} \\ \text{对} & & & f_{44} & f_{45} & f_{46} \\ & & & & f_{55} & f_{56} \\ & & & & & f_{66} \\ \text{称} & & & & & \end{pmatrix} \quad (6-1-7)$$

是单元左端的柔度矩阵

各柔度系数  $f_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,6, j=1,2,\dots,6$ ) 的表达式如下:

$$f_{11} = -\frac{R}{EA_x} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + \frac{R^3}{EI_y} \left( \frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$+ \frac{R}{GA_{xx}} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + \frac{R y_0^2}{GK} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{12} = -\frac{R}{EA_x} \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - \frac{R^3}{EI_y} \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha)^2 - \frac{R}{GA_{xx}}$$

$$\frac{1}{2} \sin^2 \alpha$$

$$f_{13} = -\frac{R^2}{EI_y} (\alpha - \sin \alpha)$$

$$f_{14} = -\frac{R y_0}{GK} \frac{\sin^2 \alpha}{2}$$

$$f_{15} = -\frac{R y_0}{GK} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{16} = -\frac{R^2 y_0}{GK} \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha)^2$$

$$f_{22} = \frac{R}{EA_x} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + \frac{R^3}{EI_x} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) \\ + \frac{R}{GA_{xy}} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + \frac{R y_0^2}{EI_x} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{23} = -\frac{R^2}{EI_x} (1 - \cos \alpha)$$

$$f_{24} = -\frac{R y_0}{EI_x} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{25} = \frac{R y_0}{EI_x} \frac{\sin^2 \alpha}{2}$$

$$f_{26} = \frac{R^2 y_0}{EI_x} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{33} = \frac{R\alpha}{EI_y}$$

$$f_{34} = f_{35} = f_{36} = 0$$

$$f_{44} = \frac{R}{EI_x} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + \frac{R}{GK} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{45} = -\frac{R}{EI_x} \frac{\sin^2 \alpha}{2} + \frac{R}{GK} \frac{\sin^2 \alpha}{2}$$

$$f_{46} = -\frac{R^2}{EI_x} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + \frac{R^2}{GK} \left( \sin \alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{55} = \frac{R}{EI_x} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + \frac{R}{GK} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{56} = \frac{R^2}{EI_x} \frac{\sin^2 \alpha}{2} + \frac{R^2}{GK} \left( 1 - \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right)$$

$$f_{66} = \frac{R^3}{EI_x} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin^2 \alpha}{4} \right) + \frac{R^3}{GK} \left( \frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$+ \frac{R\alpha}{GA_{xy}}$$

## 二、刚度矩阵

令方程 (6-1-1) 中的  $\theta = \alpha$ , 则得到单元右端节点力的平衡关系, 写成矩阵形式是

$$\{R_2\} = [E_{12}]\{R_1\} \quad (6-1-8)$$

式中

$$\{R_2\} = [N_2 \ S_{x2} \ M_{y2} \ T_2 \ M_{z2} \ S_{y2}]^T \quad (6-1-9)$$

是单元右端的节点力向量。

$$[E_{12}] = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R(1-\cos\alpha) & R\sin\alpha & -1 & 0 & 0 & 0 \\ y_0\sin\alpha & 0 & 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha & -R(1-\cos\alpha) \\ 0 & -y_0\sin\alpha & 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha & -R\sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6-1-10)$$

是空间曲梁单元两端节点力的平衡矩阵。

设单元刚度矩阵有如下形式

$$[K_{\alpha}] = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \quad (6-1-11)$$

其中子矩阵

$$[K_{11}] = [F_1]^{-1} \quad (6-1-12)$$

$$[K_{21}] = [E_{12}] [K_{11}] \quad (6-1-13)$$

$$[K_{12}] = [K_{21}]^T \quad (6-1-14)$$

$$[K_{22}] = [E_{12}] [K_{11}] [E_{12}]^T \quad (6-1-15)$$

## 第二节 空间曲梁单元的等效节点力

图 6-2 所示一空间曲梁单元受外荷载作用的情形。在曲梁中某一点处作用的集中荷载有：轴向力  $P_x$ ，径向力  $P_r$ ，竖向力  $P_v$ ，和弯矩  $M_x$ 、 $M_y$ ，扭矩  $M_z$ ，作用在单元上的均布荷载有：轴向均布力  $P_x$ ，径向均布力  $P_r$ ，竖向均布力  $P_v$  以及均布弯矩  $M_x$ 、 $M_y$  和均布扭矩  $M_z$ ，如图 6-2。在这些力作用下，单元两端将产生固端反力。固端反力反号，便是我们所需要的单元等效节点

力。

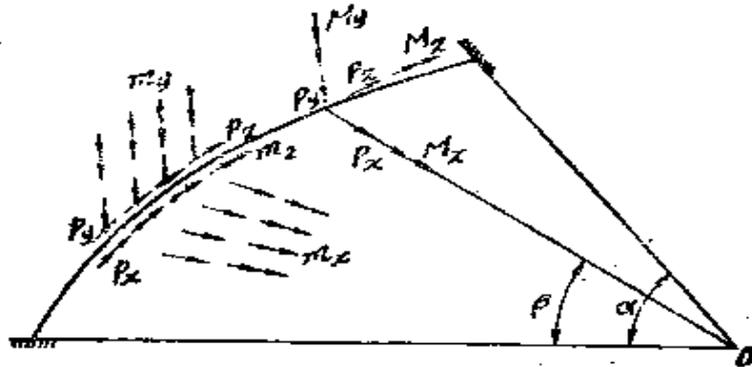


图 6-2 受荷载作用的空间曲梁单元

如果把单元左端的约束全部放松，并代之以节点力，节点力的符号和方向均与图 6-1 所示相同。那么，同样可根据平衡关系求得单元在左端节点力和单元上的外荷载共同作用下任一截面处的内力表达式，再利用能量原理和前一节推导单元柔度矩阵时的方法，可得到单元左端的节点位移关系式

$$\{d_i\} = [F_{1i}] \{R_i\} + [F_{1i}^*] \{P\} \quad (6-2-1)$$

式中  $\{d_i\}$  和  $\{R_i\}$  分别是单元左端放松约束后的节点位移向量和节点力向量，其表达式同 (6-1-5) 和 (6-1-6)。[F<sub>1i</sub>] 是单元左端的柔度矩阵，其柔度系数前面已求得。

$$\{P\} = [P_1, P_2, M_1, p_1, p_2, m_1, M_2, M_3, p_3, m_3, p_4]^T \quad (6-2-2)$$

代表作用于单元上的外荷载向量。

[f<sub>1i</sub>]=

$$\begin{bmatrix} f_{11}^0 & f_{12}^0 & f_{13}^0 & f_{14}^0 & f_{15}^0 & f_{16}^0 & f_{17}^0 & f_{18}^0 & f_{19}^0 & f_{1,10}^0 & f_{1,11}^0 & f_{1,12}^0 \\ f_{21}^0 & f_{22}^0 & f_{23}^0 & f_{24}^0 & f_{25}^0 & f_{26}^0 & f_{27}^0 & f_{28}^0 & f_{29}^0 & f_{2,10}^0 & f_{2,11}^0 & f_{2,12}^0 \\ f_{31}^0 & f_{32}^0 & f_{33}^0 & f_{34}^0 & f_{35}^0 & f_{36}^0 & f_{37}^0 & f_{38}^0 & f_{39}^0 & f_{3,10}^0 & f_{3,11}^0 & f_{3,12}^0 \\ f_{41}^0 & f_{42}^0 & f_{43}^0 & f_{44}^0 & f_{45}^0 & f_{46}^0 & f_{47}^0 & f_{48}^0 & f_{49}^0 & f_{4,10}^0 & f_{4,11}^0 & f_{4,12}^0 \\ f_{51}^0 & f_{52}^0 & f_{53}^0 & f_{54}^0 & f_{55}^0 & f_{56}^0 & f_{57}^0 & f_{58}^0 & f_{59}^0 & f_{5,10}^0 & f_{5,11}^0 & f_{5,12}^0 \\ f_{61}^0 & f_{62}^0 & f_{63}^0 & f_{64}^0 & f_{65}^0 & f_{66}^0 & f_{67}^0 & f_{68}^0 & f_{69}^0 & f_{6,10}^0 & f_{6,11}^0 & f_{6,12}^0 \end{bmatrix}$$

(6-2-3)

是单元左端约束放松后，在单位外荷载作用下产生的变形。称之为荷载作用下的变形系数矩阵。其中各系数的表达式如下：

$$f_{11}^p = \frac{R}{EA_s} \left\{ \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \beta + \frac{1}{2} \cos \alpha \sin(\alpha - \beta) \right\} + \frac{R^2}{EI_v} \left[ (\alpha - \beta) \left( 1 + \frac{1}{2} \cos \beta \right) - \sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha - \beta) \left( 1 - \frac{1}{2} \cos \alpha \right) \right] + \frac{R}{GA_{ss}} \frac{1}{2} \left[ (\alpha - \beta) \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) \cos \alpha \right] - \frac{R y_0^2}{GK} \frac{1}{2} \left[ (\alpha - \beta) \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) \cos \alpha \right]$$

$$f_{12}^p = \frac{R}{EA_s} \left\{ \frac{1}{2} \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) - \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \beta \right\} - \frac{R^2}{EI_v} \left[ 1 - \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \sin \beta \right] - \frac{R}{GA_{ss}} \frac{1}{2} \left[ \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta) \sin \beta \right] - \frac{R y_0^2}{GK} \frac{1}{2} \left[ \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta) \sin \beta \right]$$

$$f_{13}^p = \frac{R^2}{EI_v} [\alpha - \beta - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$f_{14}^p = \frac{R^2}{EA_s} \frac{1}{2} \sin^2 \alpha + \frac{R^4}{EI_v} \left\{ \left( \frac{1}{2} \alpha^2 - \alpha \sin \alpha \right) + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right\} + \frac{R^2}{GA_{ss}} \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha)^2 + \frac{R^2 y_0^2}{GK} \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha)^2$$

$$f_{15}^p = \frac{R^2}{EA_s} \left( \sin \alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin^2 \alpha}{4} \right) - \frac{R^4}{EI_v} \left( \frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{4} \right) - \frac{R^2}{GA_{ss}} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + \frac{R^2 y_0^2}{GK}$$

$$\left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{16}^p = \frac{R^3}{EI_v} \left[ \frac{1}{2} \alpha^2 - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha + 1 \right]$$

$$f_{17}^p = -\frac{R y_0}{GK} \frac{1}{2} \left[ \sin \alpha \sin (\alpha - \beta) + (\alpha - \beta) \sin \beta \right]$$

$$f_{18}^p = -\frac{R y_0}{GK} \frac{1}{2} \left[ (\alpha - \beta) \cos \beta - \sin (\alpha - \beta) \cos \alpha \right]$$

$$f_{19}^p = \frac{R^2 y_0}{GK} \left[ \frac{1}{2} \sin \alpha \sin (\alpha - \beta) + \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \sin \beta + \cos \alpha - \cos \beta \right]$$

$$f_{110}^p = \frac{R^2 y_0}{GK} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{111}^p = -\frac{R^2 y_0}{GK} \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha)^2$$

$$f_{112}^p = -\frac{R^3 y_0}{GK} \left( \sin \alpha - \alpha \cos \alpha - \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{21}^p = \frac{R}{EA_x} \frac{1}{2} \left[ \sin \alpha \sin (\alpha - \beta) + (\alpha - \beta) \sin \beta \right]$$

$$- \frac{R^3}{EI_v} \left[ \cos \beta - \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \sin (\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \right.$$

$$\left. (\alpha - \beta) \sin \beta \right] - \frac{R^2}{GA_{xx}} \frac{1}{2} \left[ \sin \alpha \sin (\alpha - \beta) \right.$$

$$\left. - (\alpha - \beta) \sin \beta \right] - \frac{R y_0^2}{EI_x} \frac{1}{2} \left[ \sin \alpha \sin (\alpha - \beta) \right.$$

$$\left. + (\alpha - \beta) \sin \beta \right]$$

$$f_{22}^p = \left( \frac{R}{EA_x} + \frac{R^3}{EI_v} \right) \left[ \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \cos \beta - \frac{1}{2} \cos \alpha \sin \right.$$

$$\left. (\alpha - \beta) \right] + \frac{R}{GA_{xx}} \frac{1}{2} \left[ (\alpha - \beta) \cos \beta + \sin (\alpha - \beta) \right.$$

$$\left. \cos \alpha \right] - \frac{R y_0^2}{EI_x} \frac{1}{2} \left[ (\alpha - \beta) \cos \beta - \sin (\alpha - \beta) \right.$$

$$\left. \cos \alpha \right]$$

$$f_{23}^p = \frac{R^2}{EI_v} (\cos \alpha - \cos \beta)$$

$$\begin{aligned} f_{24}^p &= \frac{R^2}{EA_x} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin^2 \alpha}{4} \right) - \frac{R^4}{EI_v} \left( \sin \alpha - \alpha \cos \alpha \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin^2 \alpha}{4} \right) - \frac{R^2}{GA_{xx}} \left( \sin \alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) \\ &\quad - \frac{R^2 y_0^2}{EI_v} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{25}^p &= \left( \frac{R^2}{EA_x} + \frac{R^4}{EI_v} \right) \left( 1 - \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right) + \frac{R^2}{GA_{xx}} \\ &\quad - \frac{\sin^2 \alpha}{2} - \frac{R^2 y_0^2}{EI_x} \left( 1 - \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right) \end{aligned}$$

$$f_{26}^p = -\frac{R^3}{EI_v} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$$

$$f_{27}^p = -\frac{R y_0}{EI_x} \frac{1}{2} [(\alpha - \beta) \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) \cos \alpha]$$

$$f_{28}^p = \frac{R y_0}{EI_x} \frac{1}{2} [\sin \alpha \sin(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta) \sin \beta]$$

$$f_{29}^p = \frac{R^2 y_0}{EI_x} \frac{1}{2} [(\alpha - \beta) \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) \cos \alpha]$$

$$f_{2,10}^p = -\frac{R^2 y_0}{EI_x} \left( 1 - \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right)$$

$$f_{2,11}^p = \frac{R^2 y_0}{EI_x} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{2,12}^p = -\frac{R^3 y_0}{EI_x} \left( 1 - \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right)$$

$$f_{31}^p = \frac{R^2}{EI_v} [\alpha - \beta - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$f_{32}^p = -\frac{R^2}{EI_v} [1 - \cos(\alpha - \beta)]$$

$$f_{33}^p = \frac{R}{EI_v} (\alpha - \beta)$$

$$f_{34}^p = \frac{R^3}{EI_v} \left[ \frac{1}{2} \alpha^2 + \cos \alpha - 1 \right]$$

$$f_{35}^p = -\frac{R^2}{EI_y}(\alpha - \sin \alpha)$$

$$f_{36}^p = \frac{R^2 \alpha^2}{2EI_y}$$

$$f_{37}^p = f_{38}^p = \dots = f_{312}^p = 0$$

$$f_{41}^p = -\frac{R y_0}{GK} \frac{1}{2} [\sin \alpha \sin (\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) \sin \beta]$$

$$+ \frac{R y_0}{EI_x} \frac{1}{2} [\sin \alpha \sin (\alpha - \beta) + (\alpha - \beta) \sin \beta]$$

$$f_{42}^p = \frac{R y_0}{GK} \frac{1}{2} [(\alpha - \beta) \cos \beta + \sin (\alpha - \beta) \cos \alpha]$$

$$+ \frac{R y_0}{EI_x} \frac{1}{2} [(\alpha - \beta) \cos \beta - \sin (\alpha - \beta) \cos \alpha]$$

$$f_{43}^p = 0$$

$$f_{44}^p = \frac{R^2 y_0}{GK} \left( \sin \alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) - \frac{R^2 y_0}{EI_x} \left( \frac{\alpha}{2} \right.$$

$$\left. - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{45}^p = \frac{R y_0}{GK} \frac{\sin^2 \alpha}{2} + \frac{R^2 y_0}{EI_x} \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha)^2$$

$$f_{46}^p = 0$$

$$f_{47}^p = \frac{R}{GK} \frac{1}{2} [(\alpha - \beta) \cos \beta + \sin (\alpha - \beta) \cos \alpha]$$

$$+ \frac{R}{EI_x} \frac{1}{2} [(\alpha - \beta) \cos \beta - \sin (\alpha - \beta) \cos \alpha]$$

$$f_{48}^p = \frac{R}{GK} \frac{1}{2} [\sin \alpha \sin (\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) \sin \beta]$$

$$- \frac{R}{EI_x} \frac{1}{2} [\sin \alpha \sin (\alpha - \beta) + (\alpha - \beta) \sin \beta]$$

$$f_{49}^p = \frac{R^2}{GK} \left[ \sin \alpha - \sin \beta - \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \cos \beta - \frac{1}{2} \sin (\alpha \right.$$

$$\left. - \beta) \cos \alpha \right] - \frac{R^2}{EI_x} \frac{1}{2} [(\alpha - \beta) \cos \beta - \sin (\alpha$$

$$-\beta) \cos \alpha]$$

$$f_{4,10}^p = \frac{R^2}{GK} \frac{\sin^2 \alpha}{2} + \frac{R^2}{EI_x} \left( 1 - \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right)$$

$$f_{4,11}^p = \frac{R^2}{GK} \left( \sin \alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) - \frac{R^2}{EI_x} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{4,12}^p = \frac{R^3}{GK} \left( \alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right) - \frac{R^3}{EI_x} \left( 1 - \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right)$$

$$f_{51}^p = -\frac{R y_0}{GK} \frac{1}{2} [(\alpha - \beta) \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) \cos \alpha] - \frac{R y_0}{EI_x} \frac{1}{2} [\sin \alpha \sin(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) \sin \beta]$$

$$f_{52}^p = \frac{R y_0}{GK} \frac{1}{2} [\sin \alpha \sin(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta) \sin \beta] - \frac{R y_0}{EI_x} \frac{1}{2} [\sin \alpha \sin(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) \sin \beta]$$

$$f_{53}^p = 0$$

$$f_{54}^p = -\frac{R^2 y_0}{GK} \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha)^2 - \frac{R^2 y_0}{EI_x} \frac{\sin^2 \alpha}{2}$$

$$f_{55}^p = \frac{R^2 y_0}{GK} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) - \frac{R^2 y_0}{EI_x} \left( \sin \alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{56}^p = 0$$

$$f_{57}^p = \frac{R}{GK} \frac{1}{2} [\sin \alpha \sin(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta) \sin \beta] - \frac{R}{EI_x} \frac{1}{2} [\sin \alpha \sin(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) \sin \beta]$$

$$f_{58}^p = \frac{R}{GK} \frac{1}{2} [(\alpha - \beta) \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) \cos \alpha]$$

$$+ \frac{R}{EI_x} \frac{1}{2} [(\alpha - \beta) \cos \beta + \sin(\alpha - \beta) \cos \alpha]$$

$$f_{59}^p = \frac{R^2}{GK} \left[ \cos \alpha - \cos \beta - \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \sin \beta - \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta) \sin \alpha \right] + \frac{R^2}{EI_x} \frac{1}{2} [ \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) \sin \beta ]$$

$$f_{510}^p = \frac{R^2}{GK} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) - \frac{R^2}{EI_x} \left( \sin \alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{511}^p = \frac{R^2}{GK} \left( 1 - \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right) + \frac{R^2}{EI_x} \frac{\sin^2 \alpha}{2}$$

$$f_{512}^p = \frac{R^3}{GK} \left( \sin \alpha - \alpha \cos \alpha - \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + \frac{R^3}{EI_x} \left( \sin \alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{61}^p = \frac{R^2 y_0}{GK} \left[ 1 - \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \sin \beta \right] - \frac{R^2 y_0}{EI_x} \frac{1}{2} [ \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta) \sin \beta ]$$

$$f_{62}^p = \frac{R^2 y_0}{GK} \left[ \sin(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \cos \beta - \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta) \cos \alpha \right] - \frac{R^2 y_0}{EI_x} \frac{1}{2} [ (\alpha - \beta) \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) \cos \alpha ]$$

$$f_{63}^p = 0$$

$$f_{64}^p = -\frac{R^3 y_0}{GK} \left( \frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) - \frac{R^3 y_0}{EI_x} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{65}^p = \left( \frac{R^3 y_0}{GK} - \frac{R^3 y_0}{EI_x} \right) \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha)^2$$

$$\begin{aligned}
 f_{66}^p &= 0 \\
 f_{67}^p &= \frac{R^2}{GK} \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} \cos \alpha \right) \sin (\alpha - \beta) - \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \cos \beta \right] \\
 &\quad - \frac{R^2}{EI_x} \frac{1}{2} [ (\alpha - \beta) \cos \beta - \sin (\alpha - \beta) \cos \alpha ] \\
 f_{68}^p &= \frac{R^2}{GK} \left[ 1 - \cos (\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \sin \alpha \sin (\alpha - \beta) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \sin \beta \right] + \frac{R^2}{EI_x} \frac{1}{2} [ \sin \alpha \sin (\alpha - \beta) \\
 &\quad + (\alpha - \beta) \sin \beta ] \\
 f_{69}^p &= \frac{R^3}{GK} \left[ (\alpha - \beta) \left( 1 + \frac{1}{2} \cos \beta \right) - \sin \alpha + \sin \beta - \left( 1 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \cos \alpha \right) \sin (\alpha - \beta) \right] + \frac{R^2}{EI_x} \frac{1}{2} [ (\alpha - \beta) \cos \beta \\
 &\quad - \sin (\alpha - \beta) \cos \alpha ] + \frac{R(\alpha - \beta)}{GA_{sv}} \\
 f_{6,10}^p &= \left( \frac{R^3}{GK} - \frac{R^3}{EI_x} \right) \left( 1 - \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right) \\
 f_{6,11}^p &= \frac{R^3}{GK} \left( \frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + \frac{R^3}{EI_x} \left( \frac{\alpha}{2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) \\
 f_{6,12}^p &= \frac{R^4}{GK} \left( \frac{1}{2} \alpha^2 - \alpha \sin \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right) \\
 &\quad + \frac{R^4}{EI_x} \left( 1 - \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right) + \frac{R^2 \alpha^2}{2GA_{sv}}
 \end{aligned}$$

实际上如图 6-2 所示的曲梁单元左端是固定的，即节点位移向量为零向量。

由 (6-2-1) 式解得左端的节点反力是

$$\{R_1\} = -[K_{11}] \{F_1^p\} \quad (6-2-4)$$

式中  $[K_{11}]$  就是前一节已求得的单元左端的刚度矩阵。

单元右端的节点反力则可用平衡关系求得：

$$\{R_2\} = [E_{12}] \{R_1\} + [E_{12}^p] \{P\} \quad (6-2-5)$$

$$[E_{12}^P] = \begin{pmatrix} -\cos(\alpha - \beta) & -\sin(\alpha - \beta) & 0 & -R \sin \alpha & -R(1 - \cos \alpha) & 0 \\ \sin(\alpha - \beta) & -\cos(\alpha - \beta) & 0 & R(1 - \cos \alpha) & -R \sin \alpha & 0 \\ -R(1 - \cos(\alpha - \beta)) & R \sin(\alpha - \beta) & -1 & -R^2(\alpha - \sin \alpha) & R^2(1 - \cos \alpha) & -R \alpha \\ y_0 \sin(\alpha - \beta) & -y_0 \cos(\alpha - \beta) & 0 & y_0 R(1 - \cos \alpha) & -y_0 R \sin \alpha & 0 \\ y_0 \cos(\alpha - \beta) & y_0 \sin(\alpha - \beta) & 0 & y_0 R \sin \alpha & y_0 R(1 - \cos \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[0] \begin{pmatrix} -\cos(\alpha - \beta) & -\sin(\alpha - \beta) & -R(1 - \cos(\alpha - \beta)) & -R \sin \alpha & -R(1 - \cos \alpha) & -R^2(\alpha - \sin \alpha) \\ \sin(\alpha - \beta) & -\cos(\alpha - \beta) & -R \sin(\alpha - \beta) & R(1 - \cos \alpha) & R \sin \alpha & -R^2(1 - \cos \alpha) \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -R \alpha \end{pmatrix}$$

式(6—2—5)中  $[E_{12}]$  是前面已求得的曲梁单元在无外荷载作用下两端节点力的平衡矩阵。而  $[E_{12}^p]$  则是曲梁单元在外荷载作用下的两端节点力平衡矩阵，其内容见式(6—2—6)。

### 第三节 曲梁单元的坐标变换

对于曲线桥梁结构，可以取如图 6—3 所示的坐标系。即让整体坐标系的  $\bar{Y}$  轴与局部坐标系的  $Y$  轴取得一致。且认为该轴是一根主惯性轴，则单元的坐标变换矩阵  $[T]$  是

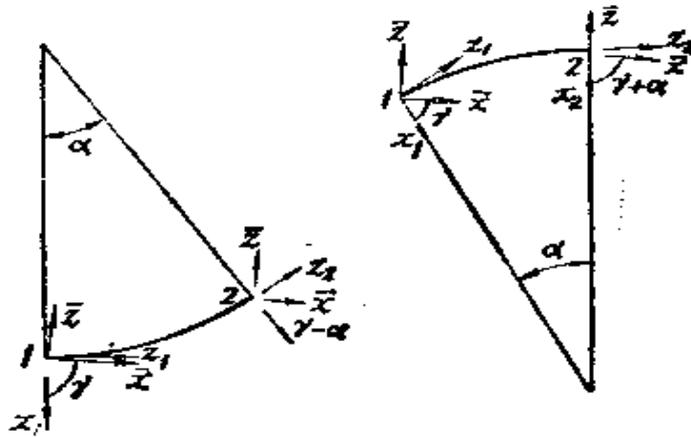


图 6—3 整体坐标轴  $\bar{X}$ ,  $\bar{Z}$  局部坐标轴  $X_1, Z_1$  和  $X_2, Z_2$

$$[T] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

其中：

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} \cos(\gamma \pm \alpha) & -\sin(\gamma \pm \alpha) & 0 \\ \sin(\gamma \pm \alpha) & \cos(\gamma \pm \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### 第四节 曲线梁桥中预应力的空间分析关系式

在图 6—4 所示的坐标系中，设  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向的单位向量分别为  $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ ，预应力筋的位置向量为  $\vec{\pi}$ ，则

$$\vec{\pi} = (R + H) \cos \theta \vec{i} + (R + H) \sin \theta \vec{j} + z \vec{k} \quad (6-4-1)$$

设预张力为  $F$ ，则预应力筋中预加力向量  $\vec{F}$  为

$$\begin{aligned} \vec{F} = F d \vec{\pi} / ds = F [H' \cos \theta - (R + H) \theta' \sin \theta'] \vec{i} \\ + F [H' \sin \theta + (R + H) \theta' \cos \theta'] \vec{j} + F z' \vec{k} \end{aligned} \quad (6-4-2)$$

设曲梁单元沿切线方向、法线方向和垂直方向的单位向量分别为  $\vec{L}$ 、 $\vec{M}$ 、 $\vec{N}$ ，由图 6—5 和图 6—6 可知：

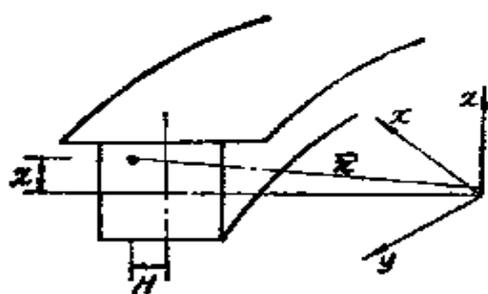


图 6—4 预应力筋的位置向量表示

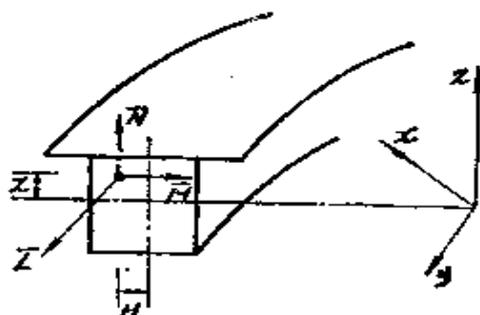


图 6—5 预应力筋的向量分量

$$\begin{aligned} \vec{L} &= -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \\ \vec{M} &= -\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j} \\ \vec{N} &= \vec{k} \end{aligned}$$

则预张力  $F$  在三个方向的分量为

$$\begin{aligned} F_l &= \vec{F} \cdot \vec{L} = F (R + H) \theta' \\ F_m &= \vec{F} \cdot \vec{M} = -F H' \\ F_n &= \vec{F} \cdot \vec{N} = F z' \end{aligned} \quad (6-4-3)$$

用  $s$  表示空间力筋的弧长，则

$$ds = (d_x^2 + d_y^2 + d_z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (6-4-4a)$$

把  $x = (R + H) \cos \theta$ ,  $y = (R + H) \sin \theta$  和  $z = z$  代入上式, 有

$$ds = d\theta [(R + H)^2 + (H')^2 + (z')^2]^{\frac{1}{2}} \quad (6-4-4b)$$

一般力筋的偏心  $H$  很小, 当  $R$  与  $H$  同时出现时,  $H'$  和  $z'$  应忽略掉, 这样

$$ds = d\theta (R + H) \quad (6-4-4c)$$

或 
$$\theta' = 1 / (R + H) \quad (6-4-5)$$

将此关系式代入前面 (6-4-3) 式, 则得到对  $\theta$  求导关系的预加力分量表达式

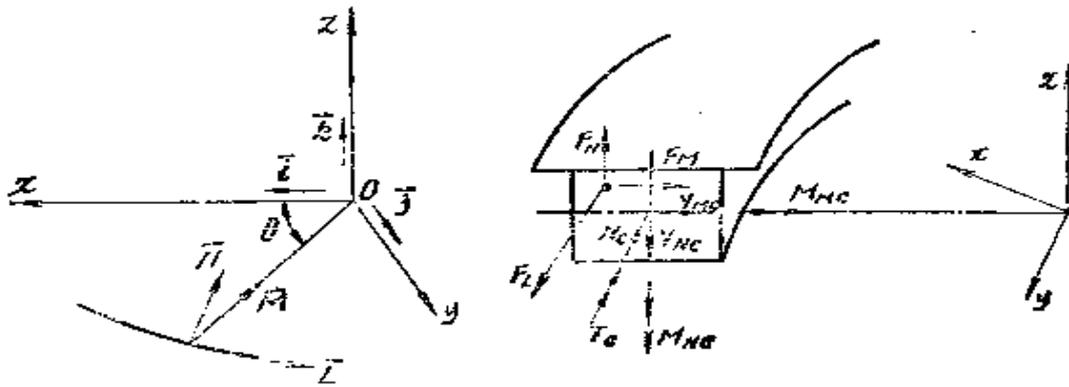


图 6-6 方向向量  $\vec{L}$ ,  $\vec{M}$ ,  $\vec{N}$       图 6-7 预应力作用下截面上的反作用力

$$F_l = F$$

$$F_m = -F H' / (R + H) \quad (6-4-6)$$

$$F_z = F z' / (R + H)$$

对于任一截面, 在预应力的作用下, 为了保持截面的平衡, 混凝土截面产生反作用力。如图 6-7 所示。

设由预张力引起的截面反力为

$$\{N_c, V_{mc}, M_{nc}, T_c, M_{nc}, V_{nc}\} \quad (6-4-7)$$

由力的平衡关系可得：

$$\left. \begin{aligned}
 N_c &= F_1 = F \\
 V_{nc} &= -F_n = F \cdot H' / (R + H) \\
 M_{nc} &= F_1 \cdot H = F \cdot H \\
 T_c &= -F_n \cdot Z - F_c \cdot H = (F \cdot H' \cdot Z \\
 &\quad - F \cdot Z' \cdot H) / (R + H) \\
 M_{nc} &= -F_1 \cdot Z = -F \cdot Z \\
 V_{nc} &= F_n = F \cdot Z' / (R + H)
 \end{aligned} \right\} (6-4-8)$$

以上分析得出了预加力在曲梁单元端截面所产生的平衡力。由于力筋曲率的影响，预加力还将在单元中产生分布力。取图 6—8 所示的微单元。根据力的平衡关系，在预应力荷载作用下曲梁的平衡微分方程为：

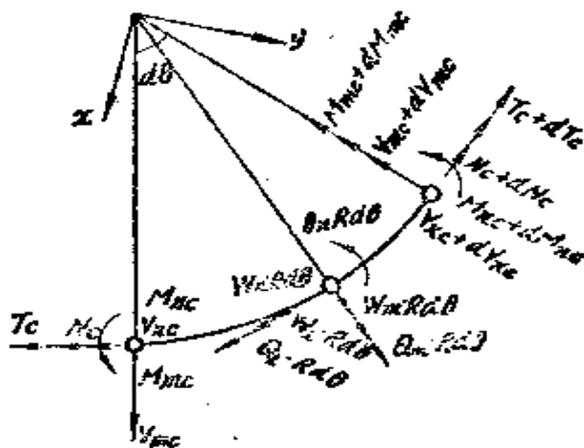


图 6—8 承受预应力荷载的曲梁微段

$$\left. \begin{aligned}
 dN_c/d\theta - W_n R - V_{nc} &= 0 \\
 dV_{nc}/d\theta - W_s R + N_c &= 0 \\
 dM_{nc}/d\theta - Q_s R - V_{nc} R &= 0 \\
 dT_c/d\theta - Q_s R - M_{nc} &= 0 \\
 dV_{nc}/d\theta + T_c + V_{nc} R - Q_s R &= 0 \\
 dV_{nc}/d\theta - W_n R &= 0
 \end{aligned} \right\} (6-4-9)$$

将 (6-4-6) 式中各项代入 (6-4-7) 式, 得出在预加力作用下的荷载表达式:

$$\begin{aligned}
 W_n &= \frac{F \cdot H''}{R(R+H)} + \frac{F}{R+H} \\
 W_i &= -\frac{F \cdot H'}{R(R+H)} \\
 Q_n &= \frac{2F \cdot H'}{R+H} \\
 Q_i &= \frac{F \cdot Z}{R+H} + \frac{F(H'' \cdot Z - Z'' \cdot H)}{R(R+H)} \\
 Q_m &= \frac{F(H' \cdot Z - Z' \cdot H)}{R(R+H)} + \frac{F \cdot Z'}{R+H} \\
 W_o &= \frac{F \cdot Z''}{R(R+H)} \quad (6-4-10)
 \end{aligned}$$

### 第五节 曲线梁桥中预应力的数值分析方法

由前面的分析可知, 曲梁在预加力作用下是一空间受力结构。对这种复杂的受力情形, 用数值分析是比较合适的。现取如图 6-9 所示的单元坐标体系, 设力筋距截面形心处的水平距离为  $X_0$ , 竖直距离  $Y_0$ , 力筋张力为  $F$ , 若  $X_0$  为常数, 则  $X'_0 = 0$ , 即力筋在单元端点不产生径向水平分力。在单元内预加力产生的径向分布力  $P_x = F / (R - X_0)$ 。

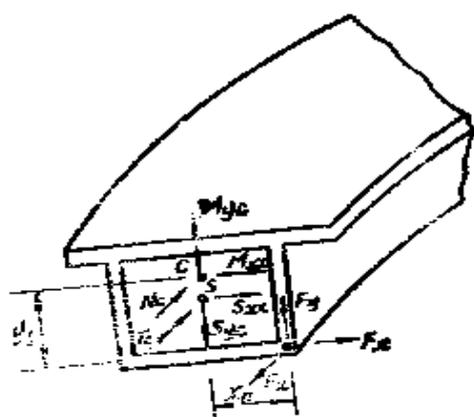


图 6-9 预应力作用下的单元截面内力

在数值分析中, 把每一个预应力曲梁单元 10 等分, 将预加力产生的分布荷载用结点荷载代替并作用于 11 个等分点上。在竖直平面内, 由于力筋张拉产生的竖直向上 (或向下) 的力为:

$$F_{xi} = -F \alpha_{xi} \quad (6-5-1)$$

其中

$$\alpha_i = (2Y_i - Y_{i-1} + Y_{i+1}) / \Delta L$$

$i = 2, 3, 4, \dots, 10$      $\Delta L = \text{单元长度}/10$ ;  $Y_i$  为第  $i$  点力筋至截面形心的竖直距离。因此, 用数值方法分析时, 单元内各点由于预加力产生的荷载有:

$$\text{径向力: } P_{xi} = F_i \Delta L / (R - X_0)$$

$$\text{扭矩: } T_i = -F_i \alpha_i X_0 - F_i \Delta L Y_i / (R - X_0)$$

$$(6-5-2)$$

$$\text{竖向力: } P_{yi} = -F_i \alpha_i$$

单元两端的力有:

$$N_1 = F_1 \cos \alpha_1$$

$$S_{x1} = F_1 \Delta L / 2 (R - X_0)$$

$$M_{y1} = -F_1 X_0 \cos \alpha_1 \quad (6-5-3)$$

$$T_1 = F_1 \alpha_1 X_0 - F_1 \Delta L Y_1 / (R - X_0)$$

$$M_{z1} = F_1 Y_1 \cos \alpha_1$$

$$S_{y1} = F_1 \alpha_1$$

$$N_{11} = -F_{11} \cos \alpha_{11}$$

$$S_{x11} = F_{11} \Delta L / 2 (R - X_0)$$

$$M_{y11} = F_{11} X_0 \cos \alpha \quad (6-5-4)$$

$$T_{11} = -F_{11} \alpha_{11} X_0 - F_{11} \Delta L Y_{11} / 2 (R - X_0)$$

$$M_{z11} = -F_{11} Y_{11} \cos \alpha_{11}$$

$$S_{y11} = -F_{11} \alpha_{11}$$

以上各式中  $F_1$  至  $F_{11}$  为单元左端至右端扣除磨阻损失后的预加力。利用第二节中推导的曲梁单元等效节点力, 数值分析中曲梁单元各等分点上由于预加力产生的结点荷载即可等效为单元节点荷载, 从而组集预加力产生的单元节点力向量, 这一过程全部由计算机完成。

### 参 考 文 献

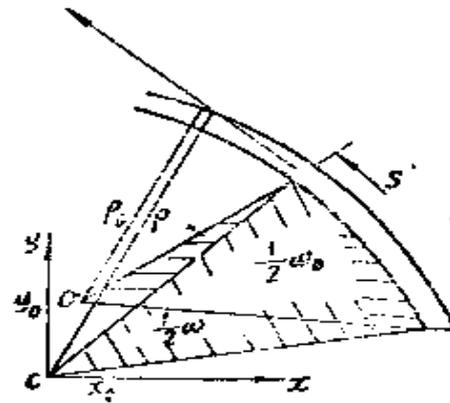
1. Zhang luoxi and Huang Jianyun: The Three Dimensional Analysis of Curved P.C. Box Girder Bridges, Computing in Civil Engineering Proceedings Sixth Conference, TCCP/ACSE, Atlanta, GA/September, 1989.
2. Special Report, Precast Prestressed Concrete Horizontally Curved Bridge Beams, PCI Journal/September-October, 1988.
3. T.L.Campbell and L. Chitunganoudh Horiontally Curved Continous Post-Tensioned Concret Beam, PCI Journal/March-April, 1975.
4. C.Menn: Pretressing of Curved Bridges, 《Analysis and Design of Bridges》, NATO ASI Series, 1984.
5. D.L.Morris: Curved Beam Stiffeness Coefficients, Journal of the Structural Divsion, ASCE, Vol.84, No. ST5, May, 1966.
6. 刘光颐, 关键光: 空间曲线预应力束摩擦应力损失计算方法的探讨, 《土木工程学报》, 1981年第3期。
7. 张罗溪: 曲线桥梁的空间计算, 《石家庄铁道学院学报》, 1988年第一期。
8. 张罗溪, 杨永峰: 预应力混凝土曲线桥梁的墩初分析与计算机辅助设计, 《中国土木工程学会计算机应用学会学术报告论文集(4)》, 1989年10月, 厦门。
9. 张罗溪: 城市立交桥、高架桥的结构分析以及设计中应注意的几个问题, 《中国土木工程学会第五届年会暨第二届城市桥梁学术讨论会论文集》, 1990年5月, 天津。
10. 北京市市政设计院工程译文: 预应力混凝土圆弧弓形梁桥的设计与分析, 1977年8月。

## 附录 薄壁截面的扭转 几何特性

在薄壁截面扭转问题中必然要涉及到截面的扇性坐标及与扇性坐标有关的翘曲几何特性的计算，包括剪切中心位置的确定，主扇性坐标，扇性静矩及扇性惯性矩的计算等等。对于实际中常采用的由矩形薄板组成的截面，还可以把积分运算化为数值计算公式。下面分别说明开口和闭口截面的翘曲几何特性的计算并给出一些有关的数值计算公式。

### 一、开口截面

如附图 1—1 所示， $\rho$  为从截面形心  $C$  至截面上任意点切线的距离，而  $\rho_0$  为由剪切中心  $O$  至截面上任意点切线的距离。则定义



附图 1—1 扇性坐标

$$\omega = \int_0^s \rho ds \quad (\text{附 1—1})$$

为截面上  $S$  点的对形心  $C$  的扇性坐标。而定义

$$\omega_0 = \int_0^s \rho_0 ds \quad (\text{附 1—2})$$

为对剪切中心  $O$  的扇性坐标。 $\omega_0$  的意义为单位长度扭转角等于  $-1$  时截面上各点的相对翘曲，也叫单位翘曲。

扇性坐标  $\omega_0$  的零点可在截面中心线上任意选取，当其中所选取的某些点使得  $\omega_0$  在全截面上积分为零，即  $\int_0^b \omega_0 t ds = 0$  时称为

主扇性坐标，该点称为主扇性零点。由扇性坐标求主扇性坐标可用公式

$$\omega_n = \omega_0 - \frac{1}{A} \int_0^b \omega_0 t ds \quad (\text{附 1—3})$$

式中  $\omega_n$  为主扇性坐标。

扇性静矩定义为

$$S_{\omega_n} = \int_0^s \omega_n t ds \quad (\text{附 1—4})$$

积分从截面端点开始。

扇性惯性矩定义为

$$I_{\omega_n} = \int_A \omega_n^2 dA \quad (\text{附 1—5})$$

式中， $\omega_n$  为主扇性坐标，积分在全截面进行。

设  $x, y$  坐标轴以形心  $C$  为原点则对  $x, y$  轴的扇性惯性矩积分分别定义

$$\left. \begin{aligned} I_{\omega_x} &= \int_0^b \omega_x t ds \\ I_{\omega_y} &= \int_0^b \omega_y t ds \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 1—6})$$

式中， $\omega$  为对形心的扇性坐标，积分在全截面进行。

设剪切中心的坐标为  $X_0, Y_0$ ，则剪切中心的位置由下式确定，

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= -\frac{I_y I_{\omega_y} - I_{xy} \cdot I_{\omega_x}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \\ y_0 &= -\frac{I_x \cdot I_{\omega_x} - I_{xy} I_{\omega_y}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 1—7})$$

式中  $I_{\omega_y}, I_{\omega_x}$  为对形心的扇性惯性积， $I_x, I_y$  分别为对  $x$  与  $y$  轴的惯性矩， $I_{xy}$  为惯性积。当  $x, y$  为主轴时式 (2—7—7) 简化为：

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{I_{ox}}{I_x} \\ y_0 &= -\frac{I_{oy}}{I_y} \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 1—8})$$

当截面由矩形薄板组成时，上述几何特性可用数值计算公式。

$$\omega = \sum \rho L;$$

$$\omega_0 = \sum \rho_0 L;$$

$$\omega_{ox} = \omega_{0x} - \frac{1}{2A} \sum_j (\omega_{0j} + \omega_{0i}) t_{ij} L_{ij}$$

$$I_{ox} = \frac{1}{3} \sum_0^n (\omega_{0i}^2 + \omega_{0j} \omega_{0i} + \omega_{0j}^2) t_{ij} L_{ij}$$

$$S_{ox} = \int_0^s \omega_x t ds$$

式中， $t$ 、 $L$ 为矩形板的厚度及长度，下标  $i$ 、 $j$  分别为一块板的两端点。

开口截面的扭转常数为

$$K = \frac{1}{3} \sum_0^n t_{ij}^3 L_{ij} \quad (\text{附 1—9})$$

## 二、闭口截面

闭口截面的扇性坐标与开口截面不同，要考虑截面中心线剪应变的影响，需附加一修正项：

$$\hat{\omega} = \int_0^s \rho ds - \psi \int_0^s \frac{ds}{t} \quad (\text{附 1—10})$$

式中扭转常数

$$\psi = \frac{2F}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (\text{附 1—11})$$

对剪切中心的扇性坐标为

$$\hat{\omega}_0 = \int_0^s \rho_0 ds - \Psi \int_0^s \frac{ds}{t} \quad (\text{附 1—12})$$

主扇性坐标为

$$\hat{\omega}_x = \hat{\omega}_0 - \frac{1}{A} \oint \hat{\omega}_0 t ds \quad (\text{附 1—13})$$

式中第二项为扇性坐标对全截面的积分除以截面的面积。

闭口截面的剪切中心根据外力和截面内剪力流对形心的扭矩平衡的原理求解。对于形心轴而言，

$$Q_x \hat{y}_0 = \oint (q_0 + q_i) \rho ds = \oint \left[ \frac{Q_x S_x}{I_y} - \frac{\int \frac{Q_x S_x}{I_y} \cdot \frac{ds}{t}}{\oint \frac{ds}{t}} \right] \rho ds \quad (\text{附 1—14})$$

式中  $Q_x$  为  $x$  轴方向的外力， $\hat{y}_0$  为闭口截面剪切中心的坐标， $q_0 + q_i$  为闭口截面的剪力流，其中  $q_0$  为截面虚构一切口时的弯曲剪力流，而  $q_i$  为使切口闭合的附加剪力流， $S_x$  为截面静矩， $\rho$  为由形心至截面任意点切线的距离。令  $Q_x = 1$ ，式(附 1—14)可化为：

$$\begin{aligned} \hat{y}_0 &= \frac{1}{I_y} \left[ \oint S_x d\omega - \frac{2F}{\oint \frac{ds}{t}} \oint S_x \frac{ds}{t} \right] \\ &= \frac{1}{I_y} \left[ - \oint \omega dS_x - \frac{2F}{\oint \frac{ds}{t}} \oint S_x \frac{ds}{t} \right] \end{aligned} \quad (\text{附 1—15})$$

我们定义闭口截面的扇性惯性积为

$$I_{\hat{\omega}_x} = \oint \hat{\omega} \cdot dA \quad (\text{附 1—16 a})$$

式中  $\hat{\omega}$  为闭口截面对形心的扇性坐标，经运算得

$$I_{\hat{\omega}_x} = \oint \left[ \left( \int_0^s \rho ds - \Psi \int_0^s \frac{ds}{t} \right) x t ds \right] = \oint \omega dS_x +$$

$$\frac{2F}{\oint \frac{ds}{t}} \oint S_x \frac{ds}{t} \quad (\text{附 1—16b})$$

将式 (附 1—16b) 代入式 (附 1—15), 得

$$\hat{y}_0 = -\frac{I_{\hat{z}_x}}{I_x} \quad (\text{附 1—17})$$

同理可得

$$\hat{x}_0 = \frac{I_{\hat{z}_y}}{I_y} \quad (\text{附 1—18})$$

式中,

$$I_{\hat{z}_y} = \oint \hat{\omega}_y^2 dA \quad (\text{附 1—19})$$

可以看出闭口截面剪切中心计算公式与前述开口截面剪切中心计算公式相同, 只是此处采用了闭口截面的扇性惯性积。

主扇性坐标的平方在全截面上对面积的积分即为扇性惯性积。

$$I_{\hat{z}_x} = \int_A \hat{\omega}_x^2 dA \quad (\text{附 1—20})$$

闭口截面扇性静矩已由式 (2—3—37) 给出:

$$S_{\hat{z}_x} = S_{\hat{z}_x}^0 - \frac{\oint S_{\hat{z}_x}^0 \frac{ds}{t}}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (\text{附 1—21})$$

式中,  $S_{\hat{z}_x}^0$  为截面虚构一切口时的扇性静矩, 右边第二项为使切口闭合的附加项。

当截面由矩形薄板组成时则上述各计算闭口截面几何特性的积分公式可化为数值计算公式:

$$\hat{\omega}_x = \sum_0^i \rho_{ij} L_{ij} - \frac{2F}{\sum_0^i \frac{L_{ij}}{t_{ij}}} \left[ \sum_0^i \frac{L_{ij}}{t_{ij}} \right]$$

$$\begin{aligned}
I_{\hat{\omega}_z} &= \frac{1}{3} \sum_0^b (\hat{\omega}_i x_i + \hat{\omega}_i x_i) t_{ii} L_{ii} + \frac{1}{6} \sum_0^b (\hat{\omega}_i x_i + \hat{\omega}_i x_i) t_{ii} \\
I_{\hat{\omega}_z} &= -\frac{1}{3} \sum_0^b (\hat{\omega}_{z_i}^2 + \hat{\omega}_{z_i} \hat{\omega}_{z_i} + \hat{\omega}_{z_i}^2) t_{ii} L_{ii} \\
S_{\hat{\omega}_z} &= \frac{1}{2} \sum (\hat{\omega}_{z_i} + \hat{\omega}_{z_i}) t_{ii} L_{ii} \\
&= \left[ \frac{1}{2} \sum_0^b (S_{z_{i1}} + S_{z_{i2}}) \frac{L_{ii}}{t_{ii}} + \frac{1}{12} \sum_0^b (\hat{\omega}_{z_i} \right. \\
&\quad \left. - \hat{\omega}_{z_i}) L_{ii}^2 \right] / \sum_0^b \frac{L_{ii}}{t_{ii}}
\end{aligned}$$

式中符号意义同前。

闭口截面的扭转常数由式(2-3-13)及式(2-3-19)给出, 单室截面:

$$K = 4F^2 / \oint \frac{ds}{t} \quad (2-3-13)$$

多室截面:

$$K = 2 \sum_{i=1}^n \bar{q}_i F_i \quad (2-3-19)$$

式中符号的意义见第二章第三节。